TECHE
UDINE

MANOSCRITTI

FONDO PRINCIPALE

Manoscritto n. **P_MSS_1029_I**

Nel Fondo Principale sono confluiti la maggior parte dei lasciti manoscritti pervenuti alla Biblioteca Civica «Vincenzo Joppi» nel corso del tempo: si tratta perciò di un fondo composito nel quale è possibile trovare manoscritti di argomento liturgico, scientifico, giuridico, botanico e altro.

Collocazione:

Biblioteca Civica "Vincenzo Joppi", Udine
https://www.techeudine.it/fondo-principale
https://www.sbhu.it/

I

MSS·C·GIOR
RICC·DISS
EDITE
T·I·

1029

29

BIBLIOTECA COMUNALE
VINCENZO JOPPI
UDINE
N. 1029 I

Dissertazioni edite del Signor
Conte Giordano Riccati
disposte secondo l'ordine della
loro pubblicazione

Tomo I.

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24
25.
26.
27.
28.

Indice delle Opere contenute in questo Volume

1. Supplemento all'elogio del P. D. Ramiro Rampinelli &c. — — pag. 3.
2. Informazione intorno all'opera Elementa Geometriæ &c. pag. 13.
3. Riflessioni sopra la vera origine, e natura della forza centrifuga &c. pag. 19.
4. Determinare le leggi della comunicazione del moto &c. pag. 35.
5. Annotazione allo Schediasma XXIII. Verae, et germanae &c. pag. 43.
6. Annotazione allo Schediasma XXVI. Della proporzione &c. pag. 61.
7. Annotazione allo Schediasma XXXVI. Difesa di Newton pag. 83.
8. Soluzione della difficoltà proposta dal dottissimo P. D. Girolamo Saladini. pag. 103.
9. Riflessioni sopra l'Annotazione allo Schediasma XXXVI. pag. 109.
10. Lettera al Signor Roberto Zuccareda sopra le regole Architettoniche. pag. 135
11. Spiegazione d'una Esperienza. pag. 149.
12. Della maniera di costruire un portico, che ascende. pag. 159.
13. Delle figure piane isoperimetre contenenti la massima superficie. pag. 165.
14. Osservazioni sopra la necessità delle Leggi Dinamiche. pag. 177.
15. Che lo studio della Matematica non favorisce la miscredenza. pag. 191.
16. Parere sopra la forza viva. pag. 209.
17. Del centro della percossa. pag. 217.
18. Lettera al Signor Arcip. Giambatista Nicolai Prof. d'Analisi in Padova. pag. 228
19. Lettera I. al Conte Girolamo Fenaroli. pag. 237.
20. Lettera II. al Conte Girolamo Fenaroli. pag. 247.
21. Risposta alle Riflessioni analitiche dell'Abate Gioachino Pessuti. pag. 257.
22. Lettere sopra i Logaritmi. pag. 309.
23. Lettera III. al Conte Girolamo Fenaroli. pag. 383.
24. Lettera IV. al Conte Girolamo Fenaroli. pag. 415.
25. Vita di Monsignor Agostino Steffani pag. 429.
26. Del moto di discesa, o d'ascendimento de' corpi solidi immersi ne' fluidi. pag. 457.
27. Dei due generi di resistenze. pag. 489
28. Nuova maniera di costruire le scale Elittiche. pag. 503.

Supplemento all'Elogio del Padre D. Ramiro Rampinelli Bresciano etc. stampato nel Giornale di Roma 1759. Leggesi nelle Nuove Memorie per servire all'Istoria letteraria Tomo Terzo In Venezia 1760 appresso Silvestro Marsini in 8.° pag. 181.

Supplemento all'Elogio del Padre D. Ramiro Rampinelli Bresciano Monaco Benedettino della Congregazione di Monte Oliveto celebre Professore di Matematica nell'Università di Pavia stampato nel Giornale di Roma MDCCLIX.

Leggesi questo Supplemento nelle Nuove Memorie per servire alla Istoria Letteraria Tomo terzo. In Venezia MDCCLX. appresso Silvestro Marsini in 4.to pag. 141.

Amico Carissimo.

Lo Elogio del P. D. Ramiro Rampinelli Bresciano Monaco Benedettino della Congregazione di Monte Oliveto stampato nel Giornale di Roma MDCCLIX., che mi avete favorito, è scritto con tale e tanta eleganza, che sarebbe sommamente da desiderarsi, che al suo Chiarissimo Autore fossero state somministrate più veridiche, e distinte notizie. Per darvi un saggio di una tal verità, dalle lettere originali dello Illus=tre Defunto, che in gran copia si conservano presso questi Si=gnori Conti Riccati, chiaramente raccogliesi, ch'egli dopo essersi applicato alla Geometria, ed allo Analisi parecchi anni in Bologna, proseguì i suoi studj Analitico-Fisico-Ma=tematici colla direzione del fu Sig. Co. Jacopo Riccati di ce=lebre memoria, del qual punto nello Elogio non si fa alcuna menzione. Io però seguendo la traccia di dette lettere ho ra=gunate alcune cognizioni, le quali a Voi comunico, e che potrebbono servire di non inutile supplemento al lodato Elogio

Mentre D. Ramiro dimorava l'anno 1727. nel Monas=tero di S. Elena di Venezia, scrisse la prima volta al Co. Jacopo Riccati li 6. del mese di Settembre, colla occasione di inviargli una lettera del Rinomatissimo Sig. Eustachio Manfredi. Si trasferì poscia in S. Benedetto di Padova, donde con sua lettera dei 19. Febbrajo dell'anno 1728. pregò il Co. Riccati a dargli norma per proseguire i suoi studj, sinattantochè nella buona stagione potesse a Castelfranco portarsi. Consigliatolo il Co. Jacopo con sua lettera dei 2. di Marzo alla lettura dei buoni

libri

libri, s'inoltra a dire, che la maggior difficoltà consiste nel ben fissare i Principj Fisico-Matematici, per la quale ricerca nulla giova l'Analisi Cartesiana, o Leibniziana; mentre queste suppongono i Principj già determinati, e ci lavorano sopra. La sola Analisi degli Antichi dietro la scoperta dei Fenomeni si è quella, che può gittare i fondamenti di tutta la più bella notizia. Espone indi il metodo, di cui suole valersi, esaminando i fenomeni principali, cavando quelle conseguenze, che immediatamente si deducono, mettendole a confronto per vedere, se si può stabilire una qualche legge fondamentale, e se questo non riesce, facendo nuove esperienze, ed aggiungendo tutte quelle osservazioni, e cautele, che nella citata lunga lettera si contengono.

Preso alloggio in Castelfranco, si trattenne quivi il P. Rampinelli non piccol tempo, per attendere di proposito alle geniali sue applicazioni colla personale assistenza del Co. Riccati, e restituitosi poscia al suo Monastero di Padova, gli scrisse in questo tenore li 12. Agosto dell' anno stesso 1726. Nel venturo inverno credo senza dubbio, che potrò venire costì a rinnovare a V. S. Ill.ma l'incomodo, e quando i tempi dell' inverno per lo più rotti non mel permettessero, ciò seguirà poi nella primavera. Io la supplico rallegrare la mia lettera, qualora o per alcuna difficoltà, o altro debba scrivermi, colla condizione però, ch' Ella debba rispondere solamente, quando vuole, e quando ne ha tutto l'agio, nel qual tempo mi farà ancor somma grazia di qualche documento, canone, o problema &c.

Raccogliesi dalla lettera del P. Rampinelli dei 5. di Gennajo dell' anno 1727., che coi principj ricevuti dal Co. Jacopo aveva esaurito in tutta la sua generalità la materia dei penduli, e della comunicazione dei moti, di modo che pensava, che sopra di ciò nulla gli restasse a vedere. Aggiugne: Nello studiare, che fo, incontro talvolta qualche intoppo nelle sostituzioni, perchè in esse ho pochissima pratica: mi figuro, che questa sarà materia di un' altra lezione, quando

io

io verrò costì a darle nuovo incomodo. In fatti ci insegna
una sua lettera del dì primo di Marzo, che in quella corrente
quaresima avea la libertà di portarsi a Castelfranco, per rica-
vare una seconda lezione; ma se realmente vi si portasse,
non si può ricavare dalla susseguente sua lettera, e da quella
del Co. Jacopo a Lui dirizzata nel nominato anno 1729. Il Co.
Riccati al P. Rampinelli una ben lunga istruzione intorno
le resistenze nascenti o dall'inerzia della materia, che dee
cacciarsi di luogo, o dalla tenacità, o viscosità del fluido, o
dalla scabrosità delle particelle, che il fluido compongono.
Nell'occasione pure, che il P. D. Ramiro rimandava il dì 19.
Luglio al Co. Jacopo il Problema de' Polinomj inserito poscia
dalla Celebratissima Sig.ra Contessa D. Maria Agnesi nelle sue
Instituzioni Analitiche, lo richiese del suo parere intorno l'
Opera di M. Fontenelle intitolata la Geometria degli infiniti;
e lo pregò d'insegnargli il metodo per determinare la differen-
ziale costante, che va aggiunta nelle integrazioni delle equa-
zioni differenziali del secondo grado. Soddisfece ad ambo i
quesiti il Co. Riccati con sua lettera dei 16. Agosto, notando
due massicci sbagli nel Libro dell'Autore Francese, distin-
guendo tra casi, ne' quali è generalmente necessaria l'ag-
giunta delle costanti nella integrazione delle equazioni
differenzio-differenziali, ed illustrando il tutto con degli esempj.

Negli anni posteriori al 1729. poche lettere passarono
fra il Co. Jacopo, ed il P. D. Ramiro, avendo cominciato quasi-
ti l'anno 1730. a valersi del mezzo del Sig. Co. Giordano Ricca-
ti figlio del Co. Jacopo, per proporre le sue ricerche, e i suoi
dubbj, e per ricaverne lo scioglimento: ed una tale letteraria
corrispondenza durò poi costantemente sino alla morte del
P. Rampinelli.

Dalla serie per tanto delle sue lettere dirette al Co. Gior-
dano siamo istruiti, che nel mese di Maggio del 1731. si tras-
ferì il P. Rampinelli da S. Benedetto di Padova a S. Maria
nuova di Roma, e per poter meglio gustare della vetustà,
e magnificenza di quella insigne Metropoli, richiese una

distinta

distinta informazione dei Canoni principali dell' Architettura, la quale coll' occasione della fabbrica del Duomo di Castel=franco disegnato dal Celebre Sig. Francescomaria Preti era stata ridotta a fermi principj, ed a metodo. Ai 3. di Novem=bre dell' anno stesso scrisse al Co. Giordano, che fra alcune settimane credeva d'andare a veder Napoli, dove col fa=moso Sig. Martini strinse amicizia, ed ai 5. di Aprile dell' anno 1732.; che poco dopo la prossima festa di Pasqua sarebbe di partenza da Roma.

Essendo stato destinato dai suoi Superiori a Pavia, non si fermò quivi, che un anno solo, e nel mese di Maggio dell' anno 1733. passò a dimorare nel Monastero di S. Michele di Bologna, dove gli fu assegnato l'impiego ai suoi Reli=giosi utilissimo di insegnar loro la Matematica, l'Analisi, e la Fisica. A tal oggetto compose l'anno 1733 le sue Insti=tuzioni Fisiche, servendosi del metodo analitico, le quali comunicò al Co. Giordano Riccati, che presso di se ne conserva una copia. In questo stesso anno ebbe il P. D. Rampinelli il con=tento, che ai molti Letterati amici, che aveva in Bologna, si aggiungesse il P. Vincenzo Riccati della Compagnia di Gesù figlio del Co. Jacopo, al quale fu ingiunto dai suoi Su=periori di leggere la Matematica nel Collegio di S. Lucia, e che si è poi reso noto al Mondo colle sue Opere.

Dimorò il P. D. Ramiro in Bologna sino all' anno 1740. insegnandovi le citate lettere, che al primo di Marzo 1740 era in S. Michele di Bologna, ed ai 31. di Luglio in S. Fran=cesco di Brescia. Dopo pochi mesi di permanenza passò in S. Vittore di Milano, e del suo arrivo ne diede la notizia al Co. Giordano li 11. di Gennajo del 1741., essendo quivi pari=mente destinato alla istruzione nella Matematica dei giovani Monaci. Presa risoluzione di aggiungere alle sue Instituzioni Fisiche un Trattato di Idrostatica, e passandogli molte dubbietà per la mente sopra questa oscura materia, furono esse rischia=rate da una Dissertazione, che gli comunicò il Co. Jacopo Riccati, la quale uscirà alla luce nel terzo Tomo delle sue Opere.

ebbe

Ebbe quivi D. Ramiro la bella sorte di conoscere la Celebre Sig. Co. D. Maria Agnesi, e di ammirarne il raro talento, la quale essendo attissima agli studj Fisico-Matematici, fece in essi colla scorta del P. Rampinelli tali, e tanti progressi, che giunse ben presto a comporre le sue famosissime Instituzioni Analitiche. Non volendole dare al pubblico senza una piena approvazione del P. Rampinelli, e non fidandosi egli per la sua innata modestia del proprio giudizio, la consigliò a raccomandarne l'esame ai Sig. Conti Jacopo, e Giordano Riccati, i quali presagirono quel pieno applauso, che hanno poscia nel Mondo letterato ottenuto.

Fu nel 1747., che l'Eccelso Senato di Milano mosso dalla somma riputazione, alla quale era il P. D. Ramiro salito, gli conferì la Cattedra della Matematiche nella Università di Pavia. Dalla notizia, che il P. Rampinelli ne diede al Co. Giordano Riccati, si argomenti l'umiltà dell'ottimo Religioso. Ecco le sue parole contenute in una lettera scritta li 10. Dicembre 1747. *Per quanto io abbia procurato lungo tempo di scansare un peso, che nulla mi piace, pure ho dovuto cedere per ubbidienza, e per convenienza. Questo si è, che il Senato Eccellentiss. di Milano, giorni sono, ha voluto darmi la Cattedra di Matematica nella Università di Pavia con circostanze di onore, e di bontà non mai con altri più praticate, e che fanno il primo caso. Ho dovuto accettare, e converrà in tempo opportuno andare a far con poca grazia il maestro. Per la maggior parte però dell'anno la mia dimora sarà in Milano, perchè assai vicino.*

Verso la fine del mese di Agosto dell'anno 1749. si portò il P. D. Ramiro a Bologna, per avere il contento di rivedere gli amici. Il P. Vincenzo Riccati gli fece dono della sua Opera sopra le Forze vive, che allora allora era uscita in pubblico, della quale il P. Rampinelli ritornato che fu a Pavia, e dopo averla attentamente studiata, formò il seguente giudizio: *Io, che certamente non aveva prevenzione alcuna in questa questione, sono affatto persuaso, e non so imma-*

ginarmi

giungermi cosa possa rispondersi.

Nell' anno 1751. diede egli principio alle sue Lezioni Ottiche, ed avendole condotte a termine l'anno 1757., prima di porle alla stampa non per gloria del proprio nome, ma come si espresse in una sua lettera dei 11. Febbrajo, per quella convenienza, alla quale devono aver mira i Professori delle Università, volle comunicarle al Co. Giordano Riccati. Occupato questi a preparare per l'edizione le Opere del Co. Jacopo suo Padre, non poté rimandare il Trattato di Ottica al P. Rampinelli, se non nel mese di Ottobre dell' anno 1758. Si ritrovava allora in Brescia il P. D. Ramiro, dove s'era trasferito il mese di Giugno per rimettersi dall' accidente di apoplessia, che l'avea mortalmente colpito il decimo giorno di Aprile. Ritornato a Milano coll' intenzione di dar l'ultima mano all' Opera sua, nella quale avea usato il metodo sintetico, che come ben sanno i Geometri, richiede maestria grande, e profondità, fu nuovamente assalito dall' apoplessia, che a dì 6. Febbrajo dell' anno 1759. lo privò di vita in età di anni 61. e mezzo con rammarico sommo dei Letterati, e di chiunque lo conosceva.

Accoppiò egli colla dottrina una indicibile modestia, ed una soda religione accompagnata da tutte le virtù morali, e cristiane. Furono sempre gli unici suoi pensieri l'adempiere gli obblighi del proprio stato, e lo studio, unica innocente passione, da cui si lasciò dominare, indirizzandola per altro virtuosamente al servigio indefesso della sua Religione, e del Pubblico. S'impiegava volentieri in giovamento altrui, e dei ricevuti benefizj ne conservava indelebile, grata memoria. Nulla tenace nel sostenere le proprie opinioni, e totalmente alieno dal criticare le altrui, mantenne costantemente le ereditate amicizie. Stimava pochissimo i parti del suo ingegno, e comunicandoli agli Amici soleva esprimersi, che non cercava lodi, ma correzioni. In sì fatta guisa unì egli colla vera virtù di una vera umiltà quel prezioso tesoro di scientifiche

cognizioni

cognizioni, che renderanno sempremai celebre il suo nome presso la Repubblica dei Letterati.

Informazione intorno all'Opera:
Elementa Geometriae infinitissimorum auctore
D. Hieronimo Saladino Lucensi.

Leggesi nelle nuove memorie per servire
alla storia letteraria Tomo V. pag. 273
Venezia presso Giorgio Fossati
1761

Informazione intorno all'Opera Elementa Geometriae Infinitesimorum Auctore D. Hieronimo Saladino Lucensi &c. Libri Tres. Bononiae MDCCLX. Ex Typographia S. Thomae Aquinatis

Leggesi nella Nuova Memoria per servire all'Istoria Letteraria Tomo Quinto. In Venezia MDCCLXI. Appresso Giorgio Fossati

In 4.° pag. 233.

Carissimo Amico.

Giacchè non vi sono pervenuti alle mani gli Elementi della Geometria degli Infinitesimi del Dottissimo P. D. Girolamo Saladini Lucchese Monaco Celestino, e Professore di Matematica nella Università di Bologna quivi pubblicati verso la fine dell'anno scorso, ve ne darò in succinto, seguendo le tracce della Prefazione dell'Autore, un'Informazione quanto basta chiara, e distinta, [illegible]

Chiunque ha rivolto l'animo alle più sublimi cognizioni delle Matematiche Discipline, agevolmente comprende quanto siano utili, e piuttosto necessarj gli Elementi della Geometria degli Infinitesimi. Imperciocchè non potendo in essa gran fatto inoltrarsi senza l'ajuto delle quantità infinitamente piccole; egli è incredibile a quali difficoltà, ed errori soggiacciano coloro, a' quali non sieno intimamente note le affezioni, le proprietà, e le relazioni delle magnitudini infinitesime. Sogliono queste proprietà esser poco conosciute, e perchè tengono un posto superiore a quello, ch'è occupato dalle proprietà delle grandezze finite, che sono l'oggetto della volgar Geometria; e perchè prima del P. Saladini non sono state da chi che sia poste in chiaro. I famosissimi Geometri Isacco Newton, e Goffredo Leibnizio hanno i primi fra tutti scoperto il metodo di computare le quantità infinitesime, per dar perfezione al quale si sono poscia affaticati, e tuttavia si affaticano i più sublimi ingegni dell'Europa. Ma quantunque un tal metodo sia totalmente appoggiato alla Geometria degli Infinitesimi, non è ancora per

quanto

quanto io sappia; uscito un libro, che possa meritare il nome di Elementi di essa Geometria; benchè sembri, che abbiano spianata la strada e il gran Newton, dove tratta del metodo delle ragioni prime, ed ultime, e la chiarissima Signora Contessa Agnesi nel principio del Tomo secondo delle Instituzioni Analitiche. Quindi senza dubbio ne nacque, che i metodi analitici, dei quali parecchi si servono per computare le quantità infinitesime, non sono talvolta nè così universali, come finora è stato creduto, nè così veri per avventura. Mosso da queste riflessioni l'Autore, si accinse tosto a cercare con tutto lo studio que' Teoremi, che rigorosamente dimostrati, e disposti ordinatamente formassero un Trattato, che intitolar si potesse gli Elementi della Geometria degli Infinitesimi. Questo adunque egli ha pubblicato in tre libri diviso. Nel primo tratta la dottrina dei triangoli, che hanno una determinazione spettante a quantità infinitesima; esamina le differenze dei prodotti, determinate prima le differenze delle radici; e nell'Appendice del libro stesso considera le linee, che dal vero parallelismo declinano per una quantità infinitesima. Nel secondo discute le differenze degli archi, e degli angoli infinitesimi, e delle linee trigonometriche ad essi appartenenti, delle superficie generate da queste linee, e dei solidi generati da queste superficie nel ruotamento dei semicircoli intorno i diametri. Nel terzo finalmente considera le curve generalmente, le quali per maggiore chiarezza se le rappresenta come poligoni di infinitesimi lati. Esamina primieramente gli angoli fatti dalle tangenti colla curva, di poi dà il metodo di determinare col mezzo delle quantità infinitesime di ordine inferiore le infinitesime di ordine superiore tanto nelle curve riferite ai diametri, quanto nelle curve riferite al foco. Dà similmente il metodo per determinare le rette massime, e minime delle curve, di misurare le loro curvature coi circoli osculatori; nel quale luogo dimostra non tutte le curve aver tali circoli, ed esser inutile il ricorrere ai vertici delle parabole primarie e superiori; per

misurare

misurare la curvatura, quando divengono minori di ogni circolo finito. Finalmente assegna il metodo sicuro e certo per determinare, e distinguere nelle curve i punti di intersecazione, di flesso contrario, e di regresso.

Spero, che l'idea che vi ho dato d'una sì bella Opera, risveglierà in Voi il desiderio di farne acquisto, e di attentamente studiarla, per gustare le fruttuose scoperte dello stimatissimo Autore, che in età giovanile tanto si interna nelle più astruse meditazioni.

Riflessioni sopra la vera origine, e natura della forza centrifuga.

Dissertazione Fisico-Matematica

del Sig.r Conte

Giordano Riccati

Nobile Trivigiano.

In Lucca MDCCLXIII.

Per Giuseppe Rocchi.

In 12.mo Nella Raccolta di Opuscoli.

Riflessioni sopra la vera origine della forza centrifuga

Egli è fuor di dubbio, che in ogni istante nascono innumerabili forze morte in natura, che prima non esistevano. Hanno queste una doppia origine, ~~nascendo alcune~~ o dalla azione impedita di forze vicendevolmente esistenti, ~~o altre~~ o dalla perdita di forza viva, onde uno o più corpi erano animati. Se una sfera viene sostenuta da due piani inclinati, la pressione, che soffrono i piani procede dalla azione impedita della gravità della palla. Ma se una sfera si spinge contro un elastro; nel mentre che essa va perdendo la forza viva, l'elastro si carica, ed acquista sempre maggior forza morta.

Da perdita di forza viva dipende la vera origine della forza centrifuga. Il corpo A sia fornito di tale velocità costante che nel tempo dt scorra lo spazio ~~[illegible]~~ uguale alla linea AG. Se nel momento che si trova in A io lo raccomandassi alla verga CA priva di inerzia, ed atta a girarsi liberissimamente intorno al centro C, giungerebbe esso corpo al punto B dopo il mentovato tempicello dt.

Succederebbe lo stesso se, liberato il corpo A dalla verga, fosse sollecitato con direzione tendente al centro C da un elastro CD che nel tempo dt gli facesse scorrere con moto accelerato lo spazio DB.

Mi faccio ad indagare di qual forza sarebbe stato dotato l'elastro. Chiamo CA = r, AD = ds, DB = dz, m la massa del corpo A ~~e la veloc.~~ ed v la velocità guadagnata nel punto B in vigore della azione dell'elastro CD. Per le note formole avremo $f dz = \frac{mv^2}{2}$. E poiché colla velocità v nel tempo dt si scorrerebbe

si scorrerebbe lo spazio $2DB = 2dz$; ed inoltre le velocità u, v stanno come gli spazj $AD = ds$, $2DB = 2dz$ atti ad esser passati in pari tempo; ne ricaveremo l'analogia $u : v :: ds : 2dz$, ne poscia l'equazione $\frac{2udz}{ds} = v$. Sostituito questo valore in cambio di v nella formola $fdz = \frac{mv^2}{2}$ troveremo adempite le convenienze dimostrate $f = mu^2 \cdot \frac{2dz}{ds^2}$. La proprietà nota del circolo ci suggerisce l'equazione $2rdz = ds^2$ o sia $\frac{2dz}{ds^2} = \frac{1}{r}$. Fatto uso di un tal valore si scoprirà la forza dell'elastro $f = \frac{mu^2}{r}$; il che &c.

Si adatti ora il corpo nuovamente al punto A della verga in modo, che possa lungo essa scorrere senza parer resistenza, e ad esso si opponga l'elastro CB alla verga raccomandato; io dico che il detto corpo si manterrà sempre alla medesima distanza AC dal centro C: e voglio il vero se non ci fosse la molla CB, il corpo si discosterebbe dal centro per lo spazio BD, ma l'azione dell'elastro lo avvicina al centro per un pari spazio; dunque il corpo ne si accosterà ne si allontanerà; il che &c.

Non avendo il corpo moto alcuno, né di accostamento né di allontanamento in riguardo al centro C deve stare necessariamente tra due forze eguali e contrarie, cioè a dire fra la forza centrifuga e quella dell'elastro. E giacchè la forza dell'elastro si eguaglia ad $\frac{mu^2}{r}$, tale sarà altresì il valore della forza centrifuga.

Tirata

Tirata AF normale a CD, egli è noto ~~ai~~ ~~Geometri~~, che le due linee FB, BD sono adequatamente eguali, e conseguentemente FD = 2BD. Quindi espressa per AD la velocità primitiva e, per la detta direzione, si contrassegnerà per DF – 2DB la velocità nel punto B per la direzione DB, quadrupla, ovvero dell'azione dello elatero, per lo spazio DB. La composizione dei moti m'insegna, che al corpo A giunto in B resterà per la direzione della tangente condotta al punto B del circolo AB, vale a dire per la direzione AF una velocità proporzionale alla stessa AF.

Essendo rettangolo il triangolo AFD, il quadrato di AD pareggia quelli dei lati AF, FD. La forza viva nel punto A si esprimerà per AD^2 la forza viva residua in B viene dinotata da AF^2, e perciò la forza viva prodotta scoprissi proporzionale ad FD^2 o sia al quadrato della velocità in B per la direzione FB.

Il preciso valore della forza viva prodotta si è $mv^2 = f\,dz = \frac{mu^2 dz}{r}$, sostituendo in cambio di f l'equivalente grandezza $\frac{mu^2}{r}$. Ora se la detta forza prodotta nel tempo minimo dt dividesi per $dz = ds$, spazio per cui tenta di agire la forza centrifuga, ne risulta il valore $\frac{mu^2}{r}$ della stessa forza centrifuga, la quale proviene dallo scapito della nominata forza viva, in quella guisa che altre forze nascono da azione impedita di una forza preesistente.

Abbiasi il vette BCA fig. 2 ~~mobile intorno~~ mobile intorno il punto C. Al punto A applico una forza A la cui direzione AE normale a CA, ed impedisco l'azione di questa forza con un chiodo piantato

puntato in B: si avrà la pressione da B verso D che sostiene il chiodo. Tolto poi questo di mezzo ~~il chiodo~~ passi il vette alla posizione DCA e la forza A produca la momentanea azione A. AC, che veniva impedita dal chiodo. Si osservi che il punto B si è mosso per lo spazio BD, che è quello appunto per cui tenta di agire la pressione che sostiene il chiodo. In questo modo dividendo per BD l'azione impedita A. AC della forza A, ne risulta il valore dell'urto della pressione sofferta dal chiodo in B, vale a dire $A.\frac{AC}{BD}$ o pure $A.\frac{CA}{CB}$ ponendo in vece di $\frac{AC}{BD}$ la pari quantità $\frac{CA}{CB}$.

Merita singolare attenzione l'uniformità di origine nelle forze derivate o da perdita di forza viva o da impedimento d'azione, dovendosi o ~~la forza viva perduta o l'azione impedi-~~ ~~ta dividere~~ per determinare la misura delle une e delle altre ~~forze~~, dividere o la forza viva scapitata, o l'azione impedita, per quello spazietto, per cui procurano le mentovate forze di agire. Egli è di uopo riflettere altresì, che essendo la forza viva eguale alla azione della forza morta, che la produce, l'azione impedita è uno scapito di forza viva, che si sarebbe generata, se non fosse stata frastornata l'azione. E quindi tutte le forze, che di nuovo nascono in natura, si possono concepire cagionate da forza viva o perduta, o non acquistata. ×

× Inoltre la forza viva si risolve in virtù di una azione negativa, e però possiamo generalmente affermare, che tutte le nominate forze dipendono, o da una azione positiva, che si impedisce, o da una azione negativa che si effettua.

Per maggiormente illustrare la materia, immaginiamoci una superficie cilindrica concava levigatissima, che abbia per base il circolo AB

fig. 2) Per la tangente AD condotta al punto A del nominato circolo spingasi il corpo A fornito della velocità u; sarà questo obbligato dalla cilindrica superficie a girare circolarmente

intorno

intorno al centro C. Se la velocità u per AD si considera proporzionale alla linea AD, si risolverà essa in due rappresentate dalle linee AF, FD. Inoltre la forza viva del corpo nel moto AD ~~si eguaglia~~ pareggia la somma delle due forze vive eguali alla massa moltiplicata nei semiquadrati delle velocità per le direzioni AF e FD. Gli ~~urti~~ [illegible] continuati del corpo A nella superficie AB consumano la forza viva eguale ~~alla~~ al prodotto della massa A nel semiquadrato della velocità per FD e da una tale perdita ~~[illegible]~~ trae l'origine nel modo da noi spiegato la pressione ~~[illegible]~~ eguale alla forza centrifuga, che sostiene la superficie AB.

Sembrerà un paradosso ~~la conseguenza~~ [illegible] ~~[illegible]~~ e che [illegible] del [illegible].

Da uno scapito adunque di forza viva infinitesimo del secondo ordine, mentre che eguale ad $mu\frac{d\varepsilon}{r}$, mentre dal corpo A si è scorso l'arco minimo AB, e che per quanto il corpo si giri non supera mai una quantità infinitamente piccola del primo grado, nasca una forza di rigor finito quale si è la centrifuga $\frac{mu^2}{r}$ ~~che~~ Matematici hanno [illegible] [illegible], che [illegible] [illegible] della ~~dimostrazione~~ [illegible] ~~[illegible]~~.

Sino a tanto che, movendosi il corpo circolarmente intorno ad un centro dato o variabile, continuano le descritte [illegible] di forza viva, esiste sempre la forza centrifuga. La condizione del centro dato o variabile abbraccia il moto del corpo per qualunque curva, la quale si può considerare come un aggregato di archi minimi circolari combacianti. Che se il corpo o viaggi per linea retta, o invece il suo moto si riferisca ad un centro diverso da quello del raggio osculatore, nel primo caso non si dà forza centrifuga.

centrifuga, e nel secondo non si dà quella forza centrifuga, che si suppone. Laonde il primo uso è un artifizio di puro metodo.

Alla forza centrifuga non si può attribuire vera azione atta a variare lo stato del corpo, essendo tutti i suoi conati diretti non a mutare, ma a conservare lo stato del corpo stesso. Ciò non ostante se, rimosso l'impedimento o della verga, o dell'elastro, o della concava superficie, non segue più in tempo minimo la perdita infinitesima del secondo ordine di forza viva, un tal effetto lo possiamo immaginar derivato da una specie di azione della forza centrifuga, la quale esser opportuna per ispiegare l'equilibrio tra la detta forza ed un'altra, o della stessa o di vario genere. Se una forza impedirà l'azione della forza centrifuga, si consumerà in ogni istante la competente menomissima porzione di forza viva come se un ostacolo insuperabile obbligasse il corpo a muoversi circolarmente. Si conta a guadagno il non perdere la mentovata forza, e questo guadagno viene pareggiato dalla azione negativa eguale, che tenta di sottrarre la forza che colla centrifuga forma equilibrio.

Non potendo competere [sopra: convenire], come abbiamo avvertito, alla forza centrifuga vera azione capace di alterare lo stato del corpo, non è lecito l'adoperarla; e mentre per ciò si impiega, bisogna regolare i computi in maniera, che per questo capo la forza viva del corpo medesimo non resti punto modificata.

Stimo ~~una~~ opportuno di illustrare le cose ultimamente dette con degli esempi.

Problema I

Il corpo A pendente da un filo CA (fig. 3) legato al chiodo C, si muova conicamente intorno la verticale CE, e la sua velocità sia eguale a quella che avrebbe acquistato discendendo dalla altezza HC; si cerca la posizione del filo CA relativamente alla verticale CE.

Sia AC la posizione cercata, e condotta per il punto A la linea AZ normale a CE, egli è chiaro che il corpo A si muove circolarmente intorno il centro Z, e che chiamata m la sua massa, u la velocità, ed $ZA = r$, è fornito di forza centrifuga eguale ad $\frac{mu^2}{r}$. Nominiamo a la metà di HC, da cui discendendo avrebbe il corpo acquistato la velocità u, g la

gravità

gravità del corpo, e come si sanno l'eccentricità sarà $u^2 = aga$, e perciò la forza centrifuga $\frac{mu^2}{r} = \frac{agma}{r}$

Se il corpo A si ha da mantenere nella situazione CA bisogna che la forza centrifuga faccia equilibrio colla gravità. Descritto col raggio CA = b il quadrante GAC supponghiamo che il corpo passi da A in B, e tirata BD parallela ad AZ perpendicolare ad AZ si osservi che il detto corpo si discosterebbe dal centro Z per lo spazio DB, e dal centro de' gravi per lo spazio AD. Quindi nascerebbero due azioni contrarie, l'una ~~negativa~~ positiva della forza centrifuga $\frac{agma}{r}$ per l'elemento DB, e l'altra negativa della gravità gm per l'elemento AD. Si conseguirà l'equilibrio, quando le momentanee azioni saran pari. ~~Chiamando dunque~~ [illegible] AZ = x, ma AD = dx, ~~[illegible]~~ CZ ... = s, ne risulta DB = ds. Si avrà per tanto ~~[illegible]~~ $\frac{agma\,ds}{r} = gm\,dx$, o sia $\frac{aa\,ds}{r} = dx$:

ma, per i triangoli simili BDA, CAZ

[illegible] CAZ [illegible].

Si dovrà per tanto verificar l'equazione $\frac{agma}{r}\cdot DB = gm\cdot AD$, o sia $\frac{aa}{r}\cdot DB = AD$. Ma per i triangoli simili BDA, CZA $BD : DA :: CZ : ZA$, dunque sostituendo nell'ultima equazione in vece di BD, DA le linee proporzionali $CZ = s$, $ZA = r$ ~~[illegible]~~ $\frac{aas}{r} = r$, o pure $aas = r^2$. E giacchè per la proprietà del triangolo rettangolo CZA, sarà ugualmente $ZA^2 = CA^2 - CZ^2$ cioè $r^2 = b^2 - s^2$, conseguita la sostituzione

seguiremo

scopriremo $2as' = b^2 - s^2$, e conseguentemente $2as' + s^2 = b^2$

Fatto centro in H, col raggio HG si descriva la porzione di circolo G7, e condotta per il punto 7 l'ordinata 7A al quadrante GAC dico, che CA sarà la potenza cercata del pendolo, che colla velocità $u = \sqrt{2ga}$ continuamente raggirasi intorno la verticale CE.

La linea $CG = b$ è media proporzionale tra i due segmenti del diametro del circolo G7, uno de' quali $C7 = s$ e l'altro $2HC + C7 = 2a + s$. Avremo adunque $2as' + s^2 = b^2$, come si doveva ritrovare.

~~Non si trascuri di avvertire, che rilevasi [illegible] [illegible] [illegible] qualunque [illegible] [illegible] della ignota, e la forza [illegible] che [illegible] proporzionale.~~

Problema II Agg.

Sia la linea CGe, che nel sito CGe abbia una determinata velocità angolare, e nel punto G di essa linea il corpo A, il quale ha la velocità, che conviene al detto punto G della linea, e la direzione che fa angolo retto colla CG. Potendosi il corpo muovere liberamente nella Ce si domanda la curva GAD, che descriverà.

Poichè la linea si suppone sfornita di inerzia, nè vi ha potenza, che colla sua azione alteri lo stato del corpo A, egli conserverà sempre la stessa velocità, che dirò $= V$. Sia arrivata la linea in CAe, indi progredisca nel sito CDe, camminando il corpo per la linea AD. Centro C si descriva il minimo archetto AB, e si chiami $AB = dx$

$AB = dx$, $CA = y$, $BD = dy$, $AD = ds$
$CG = a$, la velocità per AB eguale a
u, quella per BD eguale a v.
Dovendosi concepire la velocità V per
AD composta dalle due u, v, la prima
per traverso AB, e la seconda per BD
lungo la linea CBe, sarà lecito adesso
di attribuire in virtù della velocità
u al corpo A la forza $\frac{Au^2}{y}$, onde si
allontana dal centro C, e supporre, che
questa forza eserciti una, dirò così, pressione
azione per lo spazietto $BD = dy$, onde
si avrà per le note formole $\frac{Au^2dy}{y} = Avdv$,
ed integrando $\int\frac{u^2dy}{y} = \frac{v^2}{2}$. Ma scor-
rendosi gli spazj ds, dx, dy nel
tempo medesimo, le velocità V, u, v
stanno come i detti spazj proporzionali

$$ds : dx :: V : u = \frac{Vdx}{ds}$$
$$ds : dy :: V : v = \frac{Vdy}{ds};$$

Dunque sostituendo avremo
$\int\frac{V^2dx^2dy}{yds^2} = \frac{V^2dy^2}{2ds^2}$, ovvero dividendo
per la quantità costante V^2,
$2\int\frac{dx^2dy}{yds^2} = \frac{dy^2}{ds^2}$. Una tale divisione
non potrebbe effettuarsi, se la grandezza
V^2 proporzionale alla forza viva del
corpo non fosse costante; laonde [illegible]
è lo stesso, che supporre invariabile la
detta forza viva, e che non si dia veruna
potenza, che colla sua azione alteri lo stato
della medesima. Presa la differenza, sup-
posta ds costante, scopriremo $\frac{dx^2dy}{yds^2} = \frac{dyddy}{ds^2}$
ossia $dx^2 = yddy$, e conseguentemente

$\dot{u}u^2 + dx^2 = ds^2 = dy^2 + y\,ddy$, ed integrando

$\overline{B+s} \cdot ds = y\,dy$. Si osservi, che

quando $y = CG = a$, s'eguaglia a nulla

non solamente lo spazio s, ma ancora la

flussione dy; perchè la direzione del corpo

in G forma angolo retto colla linea CG.

Quindi ricaveremo essere $B = 0$, ed $sds = ydy$,

e nuovamente integrando $s^2 + a^2 = y^2$,

la quale è proprietà della linea retta.

Ho aggiunta la costante a^2, perchè posto

$s = 0$ deve essere $u = a$. Nella fatta ipo-

tesi adunque il corpo A descriverà una retta

linea normale a CG; come anche senza

calcolo la ragione detta dover succedere.

Quantunque la verità della conseguenza ci assicuri, che è

irreprensibile il metodo posto in opera;

ciò non ostante per iscoprirne più a dentro

l'esattezza, mi si permetta di aggiungere

le seguenti non inutili riflessioni.

Egli è certo, che supponendo $AD = ds$ costante

e divenendo a grado a grado più grande

le ordinate $CA = y$, vanno scemando gli

archetti $AB = dx$, ed all'incontro crescono

le flussioni $BD = dy$, onde sia sempre costante

la somma dei ~~loro~~ quadrati

~~de loro quadrati~~ $dx^2 + dy^2 = ds^2$. Ommetto la dimostrazione

perchè troppo chiara. Essendo invariabile

la velocità V per $AD = ds$, le velocità

u, v staranno sempre come $dx : dy$;

e, mentre allontanandosi il corpo da G,

calerà la velocità u, colla quale il corpo

A si gira intorno il centro C, e crescerà

la velocità v, colla quale il corpo si discosta

dal detto centro. Quindi i due momenti

delle velocità udu, vdv riusciranno il

prossimo

primo negativo, ed il secondo positivo.
Giacchè $\frac{AV^2}{2} = \frac{Au^2}{2} + \frac{Av^2}{2}$, avremo differenziando $Audu + Avdv = 0$ e per conseguenza $Avdv = -Audu$.
Ora potendosi la forza viva del corpo $\frac{AV^2}{2}$ immaginare formata dalle due porzioni $\frac{Au^2}{2} + \frac{Av^2}{2}$, in quanto crescerà questa per l'elemento $Avdv$, altrettanto calerà quella per l'elemento eguale $Audu$, e per conseguenza resterà intatta la forza viva del corpo $\frac{AV^2}{2}$. Ora riceviamo le forze F, f, che agendo per gli spazj dx e dy cagionino l'una il decremento $Audu$ e l'altra il pari incremento $Avdv$ di forza viva.
Cominciando dalla forza f, avremo $fdy = Avdv$, e da integrando $\int fdy = \frac{Av^2}{2}$. Non aggiungo costante, perchè nel principio del moto sono eguali a nulla la flussione dy e la velocità v, colla quale il corpo si allontana dal centro C. Superiormente abbiamo avvertito essere $v = \frac{Vdy}{ds}$; laonde sostituendo, ci si presenterà $\int fdy = \frac{AV^2dy^2}{2ds^2}$, e presa la differenze rispetto ds costante $fdy = \frac{AV^2dyddy}{ds^2}$, o pure $f = \frac{AV^2ddy}{ds^2}$.
Il triangolo rettangolo CSA ci suggerisce l'equazione $a^2+s^2=y^2$; da cui differenziando si ricava $sds = ydy$; e passando alle seconde flussioni avendo nell'ipotesi di ds costante $ds^2 = dy^2 + yddy$. Ma $ds^2 = dy^2+dx^2$; dunque $dx^2 = yddy$, e per conseguenza

$$\frac{dx^2}{y} = ddy$$

$\frac{dx^2}{y} = ddy$. Si sostituisca questo va-
lore in cambio di ddy nella formola

$f = \frac{AV^2 ddy}{ds^2}$, e si troverà $f = \frac{AV^2 dx^2}{y ds^2}$.

Di sopra si è ritrovato $u = \frac{V dx}{ds}$, e
quindi avremo $f = \frac{Au^2}{y}$, ch'è quella
forza ~~assoluta~~ centrifuga assoluta relativa
alla velocità u per l'arco $AB = dx$ descritto
col raggio $CA = y$, che senza soluzione
del Problema abbiamo supposto camminar
anche per lo spazio $BS = dy$.

I triangoli simili ABD, CSD somministrano l'analogia $AB : AD :: CS : CD$

$dx : ds :: a : y$

da cui si deduce l'equazione $\frac{dx}{ds} = \frac{a}{y}$

Surrogato nella formola $f = \frac{AV^2 dx^2}{y ds^2}$

in vece di $\frac{dx}{ds}$ il ritrovato valore, avremo
una nuova espressione della forza

$f = \frac{AV^2 a^2}{y^3}$.

Stabilita la grandezza di f, facilmente si
ritrova quella di F. In fatti dovendo
essere $F dx = f dy$, ne proviene $F = \frac{f dy}{dx}$

$\frac{AV^2 a^2 dy}{y^3 dx}$. Ma, per i triangoli simili
ABD, CSD $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a}$, ed $s = \sqrt{y^2 - a^2}$

Dunque adempiuti i necessari calcoli

$F = \frac{AV^2 a \sqrt{y^2 - a^2}}{y^3}$

Il corpo A pertanto cammina per la retta
SD

GD colla velocità eguale alla V, ora con-
si venendo la medesima velocità composta delle
due, u di giramento intorno il centro C,
v di allontanamento dal medesimo centro
ammettono due forze f, F della natura or ora
determinata, che per gli spazi BD = dy
BA = dx eserciterebbero due azioni eguali
l'una positiva, e l'altra negativa.
Con ciò restando illesa la forza viva
del corpo A, l'unica conseguenza, che
ne risulterebbe dalle mentovate azioni,
sarebbe l'accrescimento della velocità cen=
trifuga v, e la diminuzione della velocità
u di giramento con quella legge, che
richiede il reale viaggio del corpo per
la retta GA colla velocità costante V.

Quindi si desume, che si può far uso della
azione della forza centrifuga con profitto
per determinare istruttive le modificazioni
della velocità, che allontana il corpo
dal centro, e senza nota di paralogismo,
purchè se non altro esattamente, come
è fatto nella soluzione del Problema [illegible],
si conciliano le azioni [illegible] una e più
si suppongano [illegible] forza, che esercitando
una positiva azione una negativa, compensino
le azioni, e non permettano, che le
azioni della forza centrifuga cagionino
alterazione nella forza viva. [illegible].

Penso, che le addotte riflessioni avranno mess.
in pieno lume la vera origine, e la
natura della forza centrifuga, che
accade molto spesso di maneggiare nello
scioglimento de' Problemi fisico-mate=
matici. Non si devono giammai rigettare
inutili quelle dottrine, che servono
a dimostrare maggiormente l'indole non solo
delle potenze primitive, derivate, esistenti
in natura, o semplicemente nella
mente de' Geometri, ma ancora delle

loro

loro ragioni o vere o supposte, o producenti
o non producenti alterazione di sopra rise.

Determinare le leggi della Comunicazione
del moto fra i corpi molli senza far uso di verun principio,
che dai Cartesiani, e dai Leibniziani possa essere contrastato

Dissertazione

inserta nel T. XII. della N. R. Calogeriana pag. 349

Venezia
presso Simone Occhi
1764

Determinare le leggi della Comunicazione del Moto fra i Corpi Molli senza far uso di verun Principio, che dai Cartesiani, o dai Leibniziani possa essere contrastato. Dissertazione Fisico-Matematica del Sig.r Conte Giordano Riccati.

È inserita nel Tomo XII. della N. R. Calogeriana. In Venezia. Presso Simone Occhi MDCCLXIV. in 12.mo pag. 349.

Il Conte Jacopo Riccati mio Padre nel Tomo II. della sua Opera, pag. 392. stabilisce le leggi della comunicazione del moto fra i corpi molli, facendo nascere le conclusioni dalle prime originali idee, senza valersi di qualsisia teorema meccanico, e senz'adottare qualsivoglia massima, benchè certa e dimostrabile, che da taluna delle filosofiche Sette gli possa essere contrastata. Osserva primieramente, che non dipendendo le leggi della comunicazione del moto fra le masse molli dalla varietà delle figure, e non dandosi nelle dette masse alcun ripercuotimento, non si altera li effetto, o si considerino le masse, che si urtano come intiere, o come divise in parti, le quali o si tocchino, o siano separate da minimi spazj, purchè le parti abbiano la velocità del loro tutto, e nel movimento non si diversifichi la linea diret=trice del colpo. Prova in secondo luogo valendosi del moto traslato, che se il corpo A colla velocità V dia direttamente di petto nel corpo B posto in quiete, e che dopo li incontro si incamminino entrambi colla comune velocità v, e dappoi fingasi, che il corpo B colla medesima celerità V colpisca il corpo A immoto, e che seguita la collisione amendue proce=dano colla velocità u, la somma delle velocità v+u si ag=guaglia alla primitiva V. Dimostra finalmente con un inge=gnoso e lungo giro di raziocinio, che le velocità v, u stanno fra loro nella proporzione delle masse urtanti A, B, e da queste premesse deduce la teorica della comunicazione del moto fra i corpi molli.

È riuscito a me di stabilire la mentovata teorica, accop=

piando

piando col moto traslato i seguenti due Assiomi.

Assioma I.

Se due corpi molli, ed eguali si vengono incontro con pari velocità, compiuta la comunicazione del moto si fermeno, non permettendo il principio della indifferenza, che l'uno all'altro prevaglia.

Assioma II.

Trattandosi di corpi molli non soggetti a veruna ripercussione, egli è lo stesso il considerare essi corpi interi, o pure divisi in parti, le quali o si tocchino, o siano separate da minimi intervalli, e prima l'una, indi l'altra urtino direttamente.

Teorema I.

Se il corpo A colla velocità V urta nel corpo B quieto, e dopo l'incontro si incamminano entrambi colla comune velocità v; indi il corpo B colla medesima velocità V percuote il corpo A immoto, e seguito l'urto amendue procedano colla velocità u; dico essere $V = v + u$.

Siano collocati essi corpi dentro un vascello, rispettivamente a cui il corpo A urti colla velocità V nel corpo B quieto, e dopo la percossa procedano colla celerità v. Si muova la nave colla velocità V contraria a quella del corpo A, ed in riguardo allo spazio immobile il corpo B colla velocità V incontrerà il corpo A quieto, ed ambi poscia cammineranno colla velocità u eguale alla differenza delle velocità contrarie V, v. Si avrà per tanto $V - v = u$, e conseguentemente $V = v + u$: il che &c.

Teorema II.

Se il corpo A colla velocità V colpisce il corpo eguale B immoto, procederanno dopo l'urto colla velocità comune $\frac{1}{2}V = \frac{AV}{A+B}$.

I corpi eguali A, B si vengano incontro con pari velocità $\frac{1}{2}V$, $\frac{1}{2}V$, e siano posti dentro una nave, la quale viaggi da A verso B colla velocità $\frac{1}{2}V$. Dopo la mutua percossa i corpi A, B rispettivamente al vascello staranno fermi per l'Assioma I. ma in riguardo allo spazio immobile cammineranno colla

celerità $\frac{1}{2}V$ del vascello. e conciossiachè relativamente al detto spazio il corpo A colla velocità V percuota il corpo B quieto, ne segue che se un corpo urta colla velocità V in un corpo eguale, e quieto, si muovono dopo il congresso colla velocità comune $\frac{1}{2}V$: il che &c.

Corollario

Posto che alla nave oltre la velocità $\frac{1}{2}V$ si imprima ancora l'altra $\pm W$, si moveranno i corpi eguali A, B dopo la percossa colla velocità $\frac{1}{2}V \pm W$. La V è la velocità relativa dei due corpi, e $\pm W$ quella del corpo B. Quindi se il corpo A colla velocità V relativa colpisca il corpo eguale B, che cammina colla velocità $\pm W$, terminata la comunicazione del movimento procederanno colla velocità comune $\frac{1}{2}V \pm W$.

Scolio.

Generalmente se il corpo A, la cui velocità V, urti nel corpo B quieto, e vadano poscia di conserva colla velocità v, ciò si effettui dentro un vascello, il quale viaggi colla celerità $\pm W$; egli è manifesto, che in riguardo allo spazio immobile i due corpi dopo il colpo cammineranno colla velocità $v \pm W$. Perciò se mi sarà nota la velocità v comune ai due corpi cagionata dalla velocità V del corpo A, che percuote il corpo B quieto, mi si renderà palese altresì la celerità $v \pm W$ comune ai corpi stessi nella ipotesi, che essendo costante la velocità relativa V, il corpo B proceda colla velocità $\pm W$.

Teorema III.

Se il corpo $A = 3B$ colla celerità V colpirà il corpo B quieto, si moveranno unitamente colla celerità $v = \frac{3}{4}V = \frac{AV}{A+B}$

Considera il corpo $A = 3B$ diviso in due parti $2B + B$ distanti per un menomo spazio. Urti prima il corpo B nell'eguale B, e per il Teorema II. procederanno uniti colla velocità $\frac{1}{2}V$. Colpisca poscia il corpo 2B, che si move colla velocità V nel corpo 2B, che corre avanti colla celerità $\frac{1}{2}V$: e giacchè la velocità relativa si agguaglia ad $\frac{1}{2}V$, dopo il congresso cammineranno i corpi $A + B = 4B$ colla velocità $\frac{1}{4}V + \frac{1}{2}V = \frac{3}{4}V = \frac{AV}{A+B}$, cioè a dire per il Corollario del Teorema II.

colla

colla metà $\frac{1}{4}V$ della velocità relativa, più la velocità $\frac{1}{2}V$ del corpo B: il che &c.

Corollario.

Se il corpo B colla velocità V percuoterà il corpo $A = 3B$ quieto, cammineranno di conserva colla velocità $u = \frac{1}{4}V = \frac{BV}{A+B}$. E voglia il vero, poichè $v = \frac{3}{4}V$, e per il Teorema I. $V = v + u$, ne segue essere $u = \frac{1}{4}V = \frac{BV}{A+B}$.

Teorema IV.

Se il corpo $A = 2B$ colla velocità V urta nel corpo B immoto, finita la collisione viaggeranno congiuntamente colla velocità comune $v = \frac{2}{3}V = \frac{AV}{A+B}$.

Sia il corpo $B + 2B$, che colla velocità V cacci di luogo il corpo A. Urti prima il corpo 2B in B, e camminino uniti colla velocità $= v$. Urti poi il corpo B in 3B colla velocità relativa $V - v$, e per il Corollario del Teorema III. e per lo Scolio del Teorema II. procederanno di conserva colla velocità $\frac{V-v}{4} + v = \frac{V+3v}{4}$: ma conciossiachè il corpo 3B colla velocità V colpisce il corpo B quieto, per il Teorema III. la nominata velocità ha da essere $= \frac{3V}{4}$; dunque $\frac{V+3v}{4} = \frac{3V}{4}$, ossia $v = \frac{2}{3}V = \frac{AV}{A+B}$: il che &c.

Corollario.

Se il corpo B colla velocità V percuoterà il corpo $A = 2B$ quieto, si moveranno per il Teorema I. colla velocità comune $u = \frac{1}{3}V = \frac{AV}{A+B}$.

Teorema V.

Se il corpo $A = 5B$ colla velocità V si moverà contro il corpo B quieto, terminato il congresso procederanno colla velocità $v = \frac{5}{6}V = \frac{AV}{A+B}$.

Il corpo $A = 5B$ sia diviso in due parti $4B + B$, ed urtando prima il corpo B nell'eguale B, cammineranno colla velocità $\frac{1}{2}V$. Urti dopo il corpo 4B in 2B colla velocità relativa $\frac{1}{2}V$, e per il Teorema IV. e per lo Scolio del Teorema II. si troverà la comune velocità $v = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V = \frac{5}{6}V = \frac{AV}{A+B}$: il che &c.

Corollario.

Si raccoglie dal Teorema I. che se il corpo B colla velocità

V

V investe il corpo A = 5B quieto, si moveranno dopo l'urto colla velocità comune $u = \frac{1}{6}V = \frac{BV}{A+B}$

Teorema VI.

Il corpo A = 4B colla velocità V colpisca il corpo quieto B, e compiuta la comunicazione del moto procederanno congiuntamente colla velocità $v = \frac{4}{5}V = \frac{AV}{A+B}$.

Sia distribuito il corpo 5B in due parti B + 4B, e segua primieramente l'urto di 4B in B, viaggino unitamente colla velocità v. Il corpo B dappoi colla velocità relativa V − v percuota il corpo 5B, e per il Corollario del Teorema V. e per lo Scolio del Teorema II. cammineranno colla velocità $\frac{V-v}{6} + v = \frac{V+5v}{6}$. Ma giacchè il corpo 5B urta nel corpo B quieto, devono moversi per il Teorema V. colla velocità $\frac{5}{6}V$; dunque $\frac{V+5v}{6} = \frac{5V}{6}$, e per conseguenza $v = \frac{4}{5}V = \frac{AV}{A+B}$: il che &c.

Corollario.

Ci insegna il Teorema I. che se il corpo B colla velocità V si move contro il corpo A = 4B quieto, sarà la comune velocità dopo l'urto, cioè $u = \frac{1}{5}V = \frac{BV}{A+B}$.

Scolio.

Con pari metodo proverò, che il corpo A o multiplo, o submultiplo di B urtando colla velocità V nel corpo B immoto, sarà sempre dopo il congresso la loro comune velocità $v = \frac{AV}{A+B}$.

Teorema VII.

Qualunque sia la proporzione di A : B, purchè espressa in numeri interi, sarà sempre, quando il corpo A colla velocità V investe il corpo B quieto, $v = \frac{AV}{A+B}$.

Pongasi A = mC, B = nC, e siano m, n numeri interi. Si concepisca il corpo B diviso in tanti corpi C, quante unità si contengono in n. Urti prima il corpo A nel corpo C, e per la cosa antecedentemente dimostrata si moveranno i corpi A + C dopo la percossa colla velocità $\frac{AV}{A+C}$. Colpiscano poscia i corpi A + C colla velocità $\frac{AV}{A+C}$ il secondo corpo C, e terminata la collisione, i corpi A + 2C cammineranno colla velocità $\frac{AV}{A+2C}$. Seguita la terza percossa, la velocità sarà $\frac{AV}{A+3C}$, e

dopo

dopo il numero di collisioni espresso per n, cioè finita che sia la comunicazione del moto fra i corpi $A = mC$, $B = nC$, troveremo $v = \frac{AV}{A+nC} = \frac{AV}{A+B}$: il che &c.

Scolio

In qualsivoglia ragione si riguardino le masse A, B; si può sempre esse esprimere per due numeri interi se non altro infiniti; e quindi generalmente avremo $v = \frac{AV}{A+B}$.

Teorema VIII.

Spinto il corpo A colla velocità V contro il corpo B, che si muove colla velocità $\pm U$, sarà sempre dopo il congresso $v = \frac{AV \pm BU}{A+B}$.

Succeda ciò dentro una nave, la quale viaggi colla velocità $\mp U$ eguale, e contraria a quella del corpo B, ed in riguardo allo spazio immobile il corpo A colla velocità $V \mp U$ urterà nel corpo B quieto. Sarà per tanto la loro comune velocità dopo la collisione relativamente al detto spazio $= \frac{AV \mp AU}{A+B}$. Per avere la velocità comune v dentro la nave, s'aggiunga la celerità $\pm U$, e ne risulterà $v = \frac{AV \mp AU}{A+B} \pm U = \frac{AV \pm BU}{A+B}$: il che &c.

Scolio

Essendosi dedotte le leggi della comunicazione del moto fra i corpi molli da due evidentissimi Assiomi, egli è manifesto, ch'esse leggi non sono di scelta, ma bensì di precisa inalterabile necessità, e che dipendendo parimente dai canoni della forza continuamente applicata riferita al tempo, o allo spazio, anche questi nel numero dei necessarj si debbano collocare.

Annotazione allo Schediasma XXIII.

Verae, et germanae virium elasticarum leges ex phoenomenis demonstratae.

contenuta nel Tomo III. pag. 239. delle Opere del Conte Jacopo Riccati. In Lucca. presso Jacopo Giusti

1764

Annotazione allo Schediasma XXIII.
Verae, et germanae virium elasticarum
leges ex phoenomenis demonstratae
contenuto nel Tomo III. delle Opere del
Co. Jacopo Riccati pag. 239. In Lucca
MDCCLXIV. Appresso Jacopo Giusti. in 4.to

I. Nel sovrapposto Schediasma suppone il Conte Jacopo, che leggi simili diano norma e alle consuete vibrazioni delle corde, che oscillano di traverso a due scannelli appoggiate, e alle vibrazioni delle corde, che oscillano per lungo, mentre il peso tendente a vicenda ascende, e discende. La prima supposizione ne chiama due altre, cioè che le corde siano prive di naturale rigidità, e che il peso stirante sia minimo in relazione alla massa della corda; ammesse le quali circostanze, osserveremo in progresso, che da canoni analoghi vengono regolati i due descritti generi di vibrazioni. Due rigidità vogliono nella corda distinguersi: l'una, che chiamiamo naturale, consiste in quella ripugnanza, che ha la corda a lasciarsi allungare anche prima, che le venga applicata veruna forza tendente; l'altra, che chiamiamo artificiale, si eguaglia all'accrescimento di ripugnanza per essere ulteriormente distesa, che dalla forza, o peso tendente nella corda proviene. Le due rigidità si possono parimente nominare intrinseca, ed estrinseca; dipendendo quella da cagione interna, cioè a dire dalla struttura della corda, e dallo intralciamento delle sue fibre, e questa da cagione esterna, cioè a dire dalla forza stirante. Conciossiachè ella è considerazione anzi geometrica, che fisica l'assumere corde solide prive di naturale rigidità, stimiamo opportuno, accostandosi più alla Natura, di mettere a computo il detto elemento nella soluzione del seguente Problema, e di supporre altresì finita la proporzione fra la massa della corda, ed i pesi tendenti.

Trovare la proporzione fra gli allungamenti delle corde, e i pesi, o forze, che li producono.

II. Prima di tutto egli è necessario di porre in chiaro, quali siano quelle forze, o pesi, che producono gli allungamenti nella

corda

Annotazioni alle corde.

Sia la corda AB. (Fig. 1.) tesa dal peso P, con cui stia in equilibrio; egli è certo, che per allungarla farà di uopo aggiungere al peso P un nuovo peso per esempio p. Si ponga in B un impedimento NO, il quale non permetta, che il punto B della funicella AB possa muoversi da B verso A, e levato poscia il peso P, la corda AB eserciterà contro l'impedimento NO quello stesso sforzo, ch'esercitava contro del peso P. Se torneremo ad attaccare alla corda un peso o minore, o eguale a P, non cagionerà questo veruna distensione, impiegandosi tutta la sua energia o a minorare, o a togliere interamente di mezzo il contrasto dell'impedimento NO colla corda AB, il quale tornato ad appendere alla stessa il peso P, non sostiene più veruna forza. Chi vorrà dunque allungare la corda AB, dovrà applicarle un peso P+p maggiore di P, ed il peso p aggiunto al dato P sarà quello, che produrrà in essa la distensione.

III. Dilucidato un tal punto a solo fine di evitare gli sbagli, avanziamoci a ricercare l'allungamento inassegnabile dl operato nella corda qualunque AB, la cui lunghezza $L+l$ dalla forza minima dp aggiunta alla forza, o peso finito $P+p$ stirante la corda stessa. Avvertasi, che per L si intenda la lunghezza della corda corrispondente al peso conosciuto P, e per l la distensione cagionata dal peso variabile p. Più elementi possono influire nel mentovato allungamento, la forza dp, la lunghezza della corda $AB = L+l$, il peso tendente $P+p$, la rigidità naturale r della corda, la grossezza della corda.

Canone I.

Essendo tutti gli altri elementi pari, la distensione dl è come la ~~lunghezza L+l della corda AB~~ forza minima dp, che la genera.

Canone II.

Essendo gli altri elementi dati, la distensione dl è come la lunghezza $L+l$ della corda AB.

Veggansi le dimostrazioni di questi due canoni nello Schediasma dell'Autore.

Canone

Schediasma XXIII.

Canone III.

Posti costanti tutti gli altri elementi, e nulla la rigidità naturale della corda, la distensione dl è inversamente come il peso $P+p$ tendente la corda.

Supponendosi nulla la rigidità naturale della corda, la forza $P+p$ si eguaglia alla rigidità artificiale di essa corda, con cui sta in equilibrio. Un peso adunque minimo proporzionale a $P+p$ produce un allungamento costante; e per conseguenza, fatto uso del primo canone, un peso costante dp genera un allungamento in ragione inversa del peso tendente $P+p$.

Canone IV.

Posti tutti gli altri elementi pari, e nullo il peso tendente la corda, l'allungamento dl sta in ragione reciproca della rigidità naturale della corda.

La dimostrazione di questo canone è affatto simile a quella del canone precedente.

Canone V.

Se due corde non differiscono, salvo che nella rigidità, e nel peso tendente, la distensione dl cagionata dalla stessa forza minima dp è in ragione inversa della somma $v+P+p$ della rigidità, e del peso tendente, cioè a dire dl come $\frac{1}{v+P+p}$. Abbiamo detto della somma, e non del prodotto; perchè se fosse dl come $\frac{1}{v \cdot P+p}$, si incontrerebbe nell'assurdo, che supposto uguale a nulla il peso tendente $P+p$, la distensione dl si scoprirebbe infinita.

Questo canone non è che una conseguenza dei canoni terzo, e quarto insieme combinati.

Canone VI.

Se gli altri elementi tutti saranno costanti, nulla la rigidità naturale di due corde, ed ineguali solamente le basi; un pari allungamento dl verrà prodotto dalla forza minima data dp.

Si considerino le due corde come fasci ineguali di funicelle di pari diametro. Il numero delle funicelle di un fascio al numero delle funicelle dell'altro fascio starà come la base di una corda a quella dell'altra. Tanto nel fascio piccolo, quanto nel grande

si

si concepiscano e il peso tendente $P+p$, e la forza minima dp divisi in tanto numero di parti eguali, quante sono le funicelle componenti un fascio, e si scoprirà, che a due funicelle a diversi fasci appartenenti toccano e pesi tendenti, e forza minima, che si corrispondono in ragione inversa delle basi delle corde. Essendo dunque nelle dette funicelle la forza minima come i pesi tendenti, combinati i canoni primo, e terzo, si troverà costante la distensione dl in ambe le funicelle. Quello, che si è detto di una funicella, si può applicare a tutte l'altre componenti la stessa corda, ed indi cavare la conseguenza, che sono eguali le distensioni di due corde, la cui rigidità naturale sia nulla, ed in cui tutti gli altri elementi, a riserva delle basi, siano comuni. Questo sesto canone si uniforma col terzo, il quale considerate due corde, in cui l'unico elemento variabile sia il peso tendente $P+p$, e la rigidità naturale uguale a nulla, stabilisce la distensione dl in ragione inversa del peso tendente, o sia come $\frac{1}{P+p}$. Supposto costante $P+p$, si trova parimente costante l'allungamento dl, come vuole il sesto canone. Quindi i canoni terzo, e sesto si uniscono in un solo; nè trattandosi di corde, la cui rigidità naturale sia nulla, importa in riguardo alle distensioni considerare l'elemento della varia grossezza.

Canone VII.

Essendo costanti tutti gli altri elementi, e nullo il peso tendente; le distensioni di due corde differenti di grossezza serberanno la ragione inversa delle naturali rigidità, e si verificherà essere dl come $\frac{1}{r}$.

Avvertasi, che il quarto, ed il settimo canone sono una cosa stessa. Amendue suppongono nullo il peso tendente, e variabile la rigidità: quello vuole la grossezza costante, e questo variabile. Se due corde differentemente grosse saranno della stessa materia, si ritroveranno le rigidità come le basi, o grossezze, cioè r come g, ed in virtù della stessa forza minima dp ne risulteranno allungamenti in ragione inversa delle grossezze, ch'è quanto a dire dl come $\frac{1}{g}$.

Paragonata

Schediasma XXIII.

Paragonate insieme due corde di grossezza e di materia differente, e posto che la specie h esprima la rigidità variabile di corda dello stesso diametro; ne proviene la totale rigidità v come hg; e dl come $\frac{1}{v}$, come $\frac{1}{hg}$.

La dimostrazione del presente canone riesce semplicissima. Se fosse dp come v, l'allungamento dl si scoprirebbe costante; dunque supponendosi dp costante, il detto allungamento per il primo canone è come $\frac{1}{v}$, come $\frac{1}{hg}$.

Non si trascuri il corollario, che in riguardo a corde, fornite di finita naturale rigidità, l'elemento della varia grossezza serve a determinare la misura di essa rigidità.

Canone VIII.

Se gli unici elementi variabili siano la grossezza, e la rigidità, si avrà dl come $\frac{1}{P+p+v}$, vale a dire le minime distensioni inversamente come l'aggregato del peso stirante $P+p$, e della rigidità v.

Questo canone nascente dalla combinazione del sesto, e del settimo, non è che una replica del canone quinto.

IV. I canoni fra loro diversi sono il primo, che vuole dl come dp; il secondo, che vuole dl come $L+l$; il quinto, che vuole dl come $\frac{1}{v+P+p}$. Gli altri tutti si uniformano col quinto, usato al più l'artificio di supporre o la rigidità, o il peso tendente uguale a nulla. Combinati per tanto insieme i tre diversi canoni, si trova essere dl come $\frac{L+l.\ dp}{v+P+p}$; o sia $b\,dl = \frac{L+l.\ dp}{v+P+p}$; che è quanto a dire le minime distensioni in ragione composta diretta della lunghezza della corda, e della forza minima producente esse distensioni, ed inversa della somma della rigidità naturale della corda, e del peso tendente.

V. Si vuole osservare, che nella stessa corda la rigidità v non è costante; imperciocchè quanto più in vigore dei pesi aggiunti p cresce la lunghezza $L+l$, altrettanto cala la base, a cui è proporzionale la rigidità. Chiamata dunque h la rigidità della corda corrispondente alla lunghezza L, ed al peso stirante P, avremo generalmente $v = \frac{hL}{L+l}$. La quantità $\frac{L}{L+l}$ è proporzionale alla base variabile della corda, la quale molti-

plicata

plicata per la lunghezza variabile $L+l$ mi dà il prodotto costante L; indizio della massa, che nella corda più o meno allungata resta sempre la stessa. L'espressione $v = \frac{hL}{L+l}$ si adatta anche a corde diverse, purchè per h si intenda quella rigidità, che in esse corde corrisponde alla lunghezza L, ed al peso tendente P amendue dati. Per computare la spezie h, bisogna aver riguardo alla rigidità della materia, onde è formata la corda, ed alla base della stessa corda tesa dal peso P. Le basi si ritrovano esattamente col pesare la corda, e colli avvertire, ch'esse basi sono proporzionali ai pesi divisi per la lunghezza.

Sostituito nella formola superiormente trovata in cambio di v il suo valore $\frac{hL}{L+l}$, ci si presenterà l'equazione differenziale $b\,dl = \frac{L+l \,.\, dp}{\frac{hL}{L+l} + P + p}$, che generalmente esprime la relazione fra gli allungamenti delle corde, e le forze, o pesi, che li producono.

VI. Si metterà in maggior lume la verità della nostra formola, avvertendo dedursi da essa il noto canone, che se a due corde della stessa materia, pari in lunghezza, differenti di base, e tese da pesi alle basi proporzionali, si applicheranno pesi minimi parimente alle basi proporzionali, genereranno questi distensioni minime uguali.

Sia L la lunghezza della corda corrispondente al peso tendente P, ed aggiunto il peso minimo dp, si avrà l'espressione $b\,dl = \frac{L\,dp}{h+P}$. Per le cose dette nel canone settimo la rigidità h di corde della stessa materia, ma di base differente, è proporzionale alla base: ma anche il peso P si vuole proporzionale alla base; dunque la somma $h+P$ sta come la base; e supponendosi altresì come la base il peso aggiunto dp, e costante la lunghezza L; ne segue, che relativamente alle corde, di cui parliamo, si troverà costante il prodotto $\frac{L\,dp}{h+P}$, e conseguentemente l'allungamento minimo dl ad esso prodotto proporzionale; il che &c.

Egli è da notarsi per altro, che non tutte le materie, che

collo

collo stesso nome si chiamano sono del pari rigide. Tutti gli ottoni per esempio non saranno dotati della stessa rigidità, ed oltre a ciò rendendosi una corda via più sottile, col seguitar a passare per trafila, la quale sempre più la costipa; paragonate insieme due corde della stessa materia, una sottile, e l'altra grossa, si troverà la prima alquanto più rigida di quello porti la proporzione della base, ciò ch'è stato da me confermato colla esperienza. Nella addotta dimostrazione si prescinda da sì fatti elementi.

VII. Col mezzo della formola $bdl = \frac{Ldp}{h+P}$ si troverà il tempo, in cui una corda AB si vibra per lungo. Si tolga al peso tendente P una minima porzione f, acciocchè rotto l'equilibrio, la corda si metta in oscillazione. E qui mi dichiaro di supporre, che nello stesso istante si comincino ad accorciare le fibre tutte componenti la corda, e le più vicine, e le più rimote dal peso P; il che si verificherà almeno fisicamente, trattandosi di corde; la cui lunghezza sia moderata. Sia B7 = f (Fig. 2.) la forza minima iniziale, che sollecita al moto il punto estremo B della corda AB, e Bb sia lo spazio, in fine del quale la forza sollecitante è nulla. Eguagliandosi il detto spazio alla somma degli accorciamenti delle fibre tutte, ond'è formata la corda AB; egli è facile da capire, che l'aja triangolare bB7 pareggia l'intera azione delle forze sollecitanti. Ora a questa azione si eguaglia l'aggregato delle forze vive acquistate e dal peso strisciante P, e da tutte le menome particole, che compongono la corda, per ritrovare il quale mi servo del seguente artificio. La lunghezza AB (Fig. 3.) della corda rappresenti la sua massa m, ed instituita l'analogia m : P : AB : BH, una tal linea rappresenterà la massa del peso P tendente la corda. Le due linee bD, bG normali tra loro, e colli Ab si eguaglino alla velocità massima u del punto B nel sito b, e del peso tendente P, onde sia $DG = u^2$, ed agevolmente si scoprirà, che la forza viva del peso P giunto in b è proporzionale al parallelepipedo $BK = Pu^2$. In riguardo alla forza viva acquistata dalla corda AB si compia la piramide ABE, e tutta la riflessione, che le velocità massime di due particole bB, cC stanno fra loro come gli

spazj

spazj trascorsi nello stesso tempicello, i quali serbano la ragione delle distanze AB, AC dal punto fisso A; deducesi, che se bG esprime la massima velocità della particola bB, la linea cI dinoterà la velocità massima della particola cC, ed il quadrato NI, il quadrato di essa velocità. Quindi i due solidi bQ, cO esprimono la forza viva delle due fibre bB, cC. Ma da tutti i solidi bQ, cO &c. dinotanti le forze vive delle corrispondenti particole viene formata la piramide $ABQ = \frac{mu^2}{3}$; dunque la stessa è proporzionale alla somma delle forze vive di tutte le fibre componenti la corda AB.

VIII. Ciò dimostrato riflettasi, che se si dassa una corda matematica AB (Fig. 2.) sollecitata dalla scala di forze bBZ, tesa dallo stesso peso P, e in questo solo differente dalla corda fisica AB, che la sua massa $\frac{m}{3}$ fosse tutta unita nel punto B, acquisterebbe essa la medesima forza viva. Essendo perciò nell'uno, e nell'altro caso il punto estremo B delle due corde fisica, e matematica dotato in siti analoghi della stessa velocità, e scorrendosi lo stesso spazio Ab; egli è evidente, che la corda matematica sarebbe isocrona alla fisica. Trovato per tanto il numero di vibrazioni, che farebbe la corda matematica in un minuto secondo, si caverà la conseguenza, che un pari numero di oscillazioni fa nello stesso tempo la corda fisica.

IX. Rivolgendomi alla corda matematica AB, la cui massa eguale alla terza parte di quella, ond'è fornita la corda fisica di pari lunghezza L, stia tutta concentrata nel punto B; supponiamo, che il detto punto sequitato dal peso P sia giunto nel sito C, e che indi muova un menomissimo passo Cc. Si tiri la ordinata $CD = p$, e denominata $bC = l$, sarà la infinitesima $Cc = -dl$, e per la nota formola si avrà $-pdl = \overline{\frac{m}{3}+P}\cdot udu$. Ma conforme si è determinato superiormente $bdl = \frac{Ldp}{\overline{h+P}}$; dunque fatta la sostituzione, $\frac{L}{b\cdot\overline{h+P}}\cdot -pdp = \overline{\frac{m}{3}+P}\cdot udu$, ed integrando $f^2-p^2 = \frac{b\cdot\overline{h+P}\cdot\overline{\frac{m}{3}+P}}{L}\cdot u^2$. Si aggiunge la costante f^2; perchè nel principio del moto, quando la velocità $u=0$, la forza sollecitante si agguaglia ad f peso minimo detratto dal finito P. e fatta l'estrazione della radice $\sqrt{f^2-p^2} = \frac{\sqrt{b\cdot\overline{h+P}\cdot\overline{\frac{m}{3}+P}}}{\sqrt{L}}\cdot u$. Ma

$u =$

$u = -\frac{dl}{dt}$, e $dl = \frac{L\,dp}{b \cdot h+P}$; dunque $u = \frac{-L\,dp}{b \cdot h+P \cdot dt}$, e per conseguenza eseguita la sostituzione, dopo le debite operazioni $dt = \frac{\sqrt{L \cdot \frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{b \cdot h+P}} \cdot \frac{-dp}{\sqrt{f^2-p^2}}$. L'integrale di $\frac{-dp}{\sqrt{f^2-p^2}}$, quando il punto B, compiuta una semivibrazione, sia giunto in b, s'eguaglia al quadrante diviso pel raggio, o sia prossimamente alla frazione $\frac{355}{226}$, e perciò integrando $t = \frac{\sqrt{L \cdot \frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{b \cdot h+P}} \cdot \frac{355}{226}$, ed il tempo di una vibrazione dal punto B, o sia della corda AB $t = \frac{\sqrt{L \cdot \frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{b \cdot h+P}} \cdot \frac{355}{113}$, e giacchè scopriremo in progresso essere $b = 1$, $t = \frac{\sqrt{L \cdot \frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{h+P}} \cdot \frac{355}{113}$; il che &c

X. Si troverà il valore del tempo t espresso in secondi, paragonando la corda AB con un pendolo a cicloide, il tempo di una vibrazione del quale generalmente si espone per la frazione $\frac{355}{113}$ moltiplicata per la radice della lunghezza. Un pendolo lungo once $36\frac{17}{24}$ del piede di Parigi, fa una vibrazione per secondo; dunque instituita l'analogia

$t : \frac{\sqrt{L \cdot \frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{h+P}} \cdot \frac{355}{113} :: 1 : \sqrt{36\tfrac{17}{24}} \cdot \frac{355}{113}$, scopriremo $t = \frac{\sqrt{L \cdot \frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{h+P \cdot 36\frac{17}{24}}}$,

valore del tempo di una vibrazione per lungo della corda matematica isocrona alla fisica AB contrassegnato in secondi

XI. Egli è noto, che oscillando di traverso la corda AB appoggiata a due scannelli, e tesa da una forza equivalente al peso P, e chiamato T il tempo di una sua vibrazione, preso un secondo per unità si ha l'equazione $T = \frac{\sqrt{Lm}}{\sqrt{P \cdot 36\frac{17}{24}}} \cdot \frac{113}{355}$. Osservi chi legge quanto siano differenti i tempi t, T di due oscillazioni della stessa corda, una per lungo, e l'altra per traverso, rispondendosi essi nella proporzione di $\frac{\sqrt{\frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{h+P}} : \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{P}} \cdot \frac{113}{355}$, la quale non può essere di egualità se non nel caso particolare, che sia la rigidità $h = \frac{\frac{1}{3}mP+P^2}{m} \cdot \frac{\overline{355}^2}{\overline{113}^2} - P$. Nella corda, che si vibra per lungo, si pongono in moto la massa della corda, ed il peso tendente: nella corda, che oscilla di traverso, la sola massa posta in moto si è quella della corda. Trattandosi delle oscillazioni per lungo, va messa in computo la rigidità naturale della corda, la quale nulla altera le vibrazioni trasversali

sali della corda medesima.

XII. Fra le molte ipotesi, che potrebbero considerarsi, mi ristringerò alla due sola abbracciata dal Conte Jacopo, che le corde siano prive di naturale rigidità, onde si eguagli a nulla la specie h, e che il peso stirante P sia minimo relativamente alla massa m della corda. Modificata la formola del tempo di una vibrazione per lungo a norma di queste supposizioni, prende il seguente aspetto $t = \frac{\sqrt{L\cdot\frac{1}{3}m}}{\sqrt{P}} : \frac{355}{113}$. Fatta la divisione per la quantità costante $\frac{355}{113}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$, si trova t come $\frac{\sqrt{Lm}}{\sqrt{P}}$, legge simile a quella, che regola le oscillazioni trasversali delle corde.

XIII. Torniamo a prender per mano l'equazione differenziale del numero V., cioè $b\,dl = \frac{\overline{L+l}\cdot dp}{\frac{hL}{L+l}+P+p}$, da cui generalmente si esprime la relazione fra gli allungamenti della corda, e le forze, o pesi, che li producono. Si moltiplichi per $\frac{hL}{L+l}+P+p$, e trasportato un termine da una parte all'altra, mutato il segno, troveremo $\frac{bhL\,dl}{L+l} = \overline{L+l}\cdot dp - \overline{P+p}\cdot b\,dl$. Dividansi tutti i termini per $\overline{L+l}^{b+1}$, ed avremo $\frac{bhL\,dl}{\overline{L+l}^{b+2}} = \frac{\overline{L+l}\cdot dp - \overline{P+p}\cdot b\,dl}{\overline{L+l}^{b+1}}$, ed integrando, non ommessa l'aggiunta della costante, $c - \frac{bhL}{\overline{b+1}\cdot\overline{L+l}^{b+1}} = \frac{P+p}{\overline{L+l}^{b}}$. Si determina il valore della costante c ponendo il peso aggiunto $p=0$, nel qual caso è parimente $l=0$, onde abbiasi $c = \frac{bh}{\overline{b+1}\cdot L^b} + \frac{P}{L^b}$. Si sostituisca un tal valore, e si troverà $\frac{bh}{\overline{b+1}\cdot L^b} + \frac{P}{L^b} - \frac{bhL}{\overline{b+1}\cdot\overline{L+l}^{b+1}} = \frac{P+p}{\overline{L+l}^{b}}$, o sia moltiplicando per $\overline{L+l}^{b}$, $\overline{\frac{bh}{b+1}+P}\cdot\frac{\overline{L+l}^{b}}{L^b} - \frac{bh}{b+1}\cdot\frac{L}{L+l} = P+p$; equazione finita esprimente la relazione fra le distensioni l, ed i pesi, o forze p, dai quali vengono cagionate.

XIV. Ho promesso di provare essere il coefficiente $b=1$. Otteremo ciò considerando le compressioni dell'aria, la quale ha la proprietà, che le sue densità sono proporzionali ai pesi comprimenti. Osservo nell'ultima premessa formola, che posta la rigidità $h=0$, ne risulta $P\cdot\frac{\overline{L+l}^{b}}{L^b} = P+p$, espressione, da cui si deduce, che al peso tendente $P+p=0$ corrisponderebbe

la

la lunghezza $L+l=0$ della corda, che non fosse dotata di veruna naturale rigidità.

Passando dalla corda, che si rendono elastiche per via di stiramento, a quelle, che divengono elastiche per via di compressione, si cavi la conseguenza, che levato qualsisia peso comprimente ad una corda, o elastro, la cui rigidità naturale sia nulla, si dilaterà esso infinitamente. Ora ella è tale la proprietà dell'aria, la quale minorandosi sempre più il peso comprimente, è capace di una indefinita rarefazione. Relativamente dunque all'aria la specie h si agguaglia a nulla almeno fisicamente.

Ci sia un tubo cilindrico AP (fig. 4.) ripieno di aria compressa dal peso P, e sia la lunghezza AB di esso tubo uguale ad L. Al peso P aggiungasi il peso p, che generi la compressione $AC=l$, onde la nostra corda si scorti, e si riduca alla lunghezza $BC=L-l$. Il peso comprimente $P+p$ accrescasi di nuovo per una flussione infinitesima dp, a cui corrisponda la minima compressione $Cc=dl$, e fatto uso degli stessi canoni come nella corda solida, che si stirano, col solo divario, che sia $h=0$, scopriremo $bdl=\frac{\overline{L-l}\cdot dp}{P+p}$, equazione differenziale esprimente la relazione fra le compressioni dell'aria, ed i pesi, che le producono.

Dividansi ambi i membri dell'equazione per $L-l$, ed avremo $\frac{bdl}{L-l}=\frac{dp}{P+p}$, e pure $0=\frac{dp}{P+p}-\frac{bdl}{L-l}$, ed integrando, presi i logaritmi nella logistica della sottotangente 1, $\log. c = \log.\overline{P+p}+b.\log.\overline{L-l}$, e passando dai logaritmi alla quantità ordinaria, $c=\overline{P+p}\cdot\overline{L+l}^{\,b}$.

Si stabilisca il valore della costante c ponendo $p=0$, nel qual incontro è parimente $l=0$, e per conseguenza $c=P\cdot L^{b}$. Adempiuta la sostituzione nell'ultima sovrapposta formola, troveremo $P\cdot L^{b}=\overline{P+p}\cdot\overline{L-l}^{\,b}$.

Ora essendo, conforme vuol l'esperienza, le densità d, D dell'aria come i pesi comprimenti P, $P+p$, e deducendosi dalla ritrovata equazione l'analogia $P : P+p :: \frac{1}{L^{b}} : \frac{1}{\overline{L-l}^{\,b}}$, avremo $d : D :: \frac{1}{L^{b}} : \frac{1}{\overline{L-l}^{\,b}}$. Ma le densità, che generalmente serbano la

ragione

ragione composta, diretta della massa, ed inversa dei volumi, nel nostro caso, in cui la massa è sempre costante, sono inversamente come i volumi, ed i volumi dei cilindri ΓA, ΓC, che hanno comune la base, sono come le lunghezze $BA = L$, $BC = L-l$; dunque $d : D :: \frac{1}{L} : \frac{1}{L-l}$; e perchè abbiamo altresì scoperto essere $d : D :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{\overline{L-l}^b}$, avremo $\frac{1}{L} : \frac{1}{L-l} :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{\overline{L-l}^b}$, e perciò $\overline{L-l}^{b-1} = L^{b-1}$; il che non può mai verificarsi, se non posto $b = 1$.

Se $b=1$ nelle compressioni, dee avere lo stesso valore anche negli stiramenti, servendo alle une, ed agli altri la stessa formola differenziale $b\,dl = \frac{\overline{L\mp l}\cdot dp}{\frac{hL}{L\mp l}+P+p}$, ed essendo la Natura costante nelle sue leggi. Ciò, come vedremo, viene esattissimamente confermato dalla esperienza.

XV. La formola dunque del numero XIII. cioè
$\overline{\frac{bh}{b+1}+P}\cdot\frac{\overline{L+l}^b}{L^b} - \frac{bh}{b+1}\cdot\frac{L}{L+l} = P+p$, sostituita in cambio di b l'unità, ci si presenta sotto la forma seguente $\overline{\tfrac{1}{2}h+P}\cdot\frac{L+l}{L} - \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{L}{L+l} = P+p$. Nell'asse AD (Fig. 5.) seguisi $AB = L$, ed indi a squadra conducansi AK, e $B\Gamma = P+\tfrac{1}{2}h$. Congiunti con una linea, che si prolunghi indefinitamente, i punti A, Γ, si segni $BH = P$, onde resti $H\Gamma = \tfrac{1}{2}h$, e fra gli assintoti AK, AG descrivasi l'iperbola comune ICHI, la quale passi pel punto H; affermo, che posta l'assissa $AD = L+l$, sarà l'ordinata $DI = P+p$, peso tendente, atto a ridurre la corda alla lunghezza AD.

Per la natura dell'iperbola ICHI abbiamo $\frac{\Gamma H\cdot A\Gamma}{AG} = GI$. Ma stante la similitudine dei triangoli ABΓ, ADG, $\frac{A\Gamma}{AG} = \frac{AB}{AD}$; dunque $\frac{\Gamma H\cdot AB}{AD} = GI$, o sia analiticamente $\frac{\frac{1}{2}hL}{L+l} = GI$, linea esprimente la metà della rigidità naturale della corda, mentre il peso tendente l'ha ridotta alla lunghezza $AD = L+l$. Ad AD infinita corrisponderebbe GI infinitesima, e minima conseguentemente sarebbe in tal incontro la rigidità naturale della corda divenuta infinitamente sottile. I mentovati triangoli ABΓ, ADG ci suggeriscono l'analogia

$AB : B\Gamma :: AD : DG$

$L : P+\tfrac{1}{2}h :: L+l : \overline{P+\tfrac{1}{2}h}\cdot\overline{L+l}$, da cui si deduce il valore di DG. Essendo pertanto $DG = \frac{\overline{P+\frac{1}{2}h}\cdot\overline{L+l}}{L}$, $GI = \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l}$, ne risulta

risulta $DI = DG - GI = \frac{\overline{P+\frac{1}{2}h}\cdot\overline{L+l}}{L} - \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l}$. Ma per la nostra equazione $\frac{\overline{P+\frac{1}{2}h}\cdot\overline{L+l}}{L} - \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l} = P+p$; dunque presa $AD = L+l$, sarà la corrispondente ordinata $DI = P+p$; il che ecc.

XVI. Alla lunghezza della corda $AB = L$ corrisponde per la costruzione il peso dato $BH = P$, e perciò condotta pel punto H la linea mHM parallela ad AD, si scoprirà $MI = p$, peso aggiunto, da cui è stata prodotta la distensione BD.

Nel punto C, in cui si tagliano la linea AD, e l'iperbola $iCHI$, il peso tendente s'agguaglia a nulla, e per conseguenza AC si è la lunghezza naturale della corda, mentre è nullo il peso tendente. Il doppio della linea Ce dinota la rigidità naturale della corda non tirata da peso alcuno. Per ritrovare il valore di $AC = L+l$, si ponga nella nostra formola $P+p=0$, e fatti i dovuti computi, scopriremo la lunghezza naturale della corda $AC = L+l = L\cdot\sqrt{\frac{h}{h+2P}}$. In questa circostanza $l = BC$ è quantità negativa $= L\cdot\sqrt{\frac{h}{h+2P}} - L$, la quale ci manifesta, che levato il peso tendente $BH = P$, la corda si scorta per la porzione BC. La linea CB adunque uguale ad $L - L\sqrt{\frac{h}{h+2P}}$ misura l'allungamento cagionato dal peso $BH = P$. Si troverà il valore di $Ce = \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l}$, surrogando in vece di $L+l$ la rinvenuta pari grandezza $L\sqrt{\frac{h}{h+2P}}$, onde abbiasi, adempiuti i calcoli necessarj $Ce = \frac{\sqrt{h^2+2hP}}{2}$, e conseguentemente $2Ce = \sqrt{h^2+2hP}$, rigidità naturale della corda non tirata da peso alcuno.

Posta la lunghezza AD infinita, sarà parimente infinito il peso tendente DI uguale adequatamente a DG ordinata al triangolo ADG; giacchè in tale ipotesi è infinitamente piccola l'ordinata GI all'iperbola. Per allungare adunque immensamente una corda, non ci vuol meno di un peso infinito: In fatto però questo allungamento infinito non segue. La tenacità, che connette l'una coll'altra le particole componenti la corda, è finita; e quindi accresciuto il peso tendente sino ad una data misura, la tenacità resta superata dalla forza del peso, e la corda si spezza. Ha sperimentato M. Sauveur, che una corda di acciajo si rompe, quando è tirata da un peso, che sia all'incirca 10000. volte maggiore del peso di 40. once

del

del piede di Parigi di detta corda: che per ispezzare una corda di ottone, ci vuol un peso 9000. volte più grande del peso di 40. once di essa corda: e per rompere una corda di rame, un peso 5000. volte maggiore del nominato peso di once 40.

XVII. Esaminata quanto basta la premessa costruzione relativamente agli allungamenti della corda AC, resta che si dicano alquante parole di quella porzione di curva da C verso A, in cui divenendo negativo il peso tendente, cioè a dire cangiandosi di stirante in premente, ci si presenta agli occhi una legge matematica, ma non fisica di compressioni della corda AC. Per vedere come nelle compressioni si modifichi la formola del numero XV., il peso premente $mi = p$ abbia cagionato nella corda $AB = L$ resa dal peso $P = dm$ l'accorciamento $Bd = l$, onde alla corda resti la lunghezza $Ad = L - l$, ed avremo per l'equazione al triangolo ADG $dg = \overline{\tfrac{1}{2}h + P} \cdot \frac{\overline{L-l}}{L}$, e per l'equazione all'iperbola $gi = \frac{\frac{1}{2}hL}{L-l}$, e conseguentemente, giacchè $di = mi - md = p - P$, $gi - dg = di = p - P = \frac{\frac{1}{2}hL}{L-l} - \overline{\tfrac{1}{2}h - P} \cdot \frac{\overline{L-l}}{L}$. Questa formola trae l'origine dalla espressione differenziale $dl = \frac{\overline{L-l} \cdot dp}{\frac{hL}{L-l} + P - p}$, la quale suppone, che la minima compressione dl sia in ragione composta, diretta della forza inassegnabile dp, che la produce, e della lunghezza $L-l$ della corda, ed inversa della differenza $\frac{hL}{L-l} + P - p$ fra la rigidità naturale $\frac{hL}{L-l}$ della corda, ed il peso $p - P = di$, che nella corda AC non istirata da forza alcuna ha cagionato la compressione Cd.

Ora essendo il resto pari, le minime compressioni fisiche stanno in proporzione reciproca della somma, e non della differenza della rigidità, e del peso premente, riuscendo tanto più piccole, quanto è maggiore l'aggregato della rigidità, e del peso, che preme.

Se L sarà la lunghezza di un cilindro; ed h la rigidità naturale corrispondente a un dato peso premente P, e che inoltre sia $L-l$ la lunghezza, a cui si riduca il cilindro presso dal peso $P+p$, nel quale stato la rigidità naturale si esprime per $\frac{hL}{L-l}$;

si

si verificherà la seguente formola differenziale $dl = \frac{\overline{L-l}\cdot dp}{\frac{hL}{L-l} + P+p}$

la quale essendo un dato corpo privo di qualunque rigidità naturale, si riduce alla qui sottoscritta $dl = \frac{\overline{L-l}\cdot dp}{P+p}$, ch'è quella stessa da me ritrovata (numero XIV.) relativamente all'aria. La nostra costruzione pertanto non dà la norma alle compressioni fisiche dei corpi.

XVIII. Resta, che la legge delle distensioni della corda dinotata dall'equazione $\overline{\frac{1}{2}h+P}\cdot\frac{L+l}{L} - \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l} = P+p$ si confermi colla esperienza. Dalla premessa formola si deduce essere $h = \frac{2pL - 2Pl\cdot\overline{L+l}}{2\overline{L+l}\cdot l}$ (1.), $L+l = \frac{L}{h+2P}\cdot \overline{P+p} + \sqrt{\overline{P+p}^2 + h^2 + 2hP}$.

Amendue queste espressioni verranno a taglio per confrontare colla teorica alcuni esperimenti, che sono per riferire. Furono questi fatti con somma diligenza molti anni fa nella occasione di esaminare una legge, che appunto essi esperimenti mi fecero riconoscer per falsa. Raccomandata una corda di ottone al chiodo A (fig. 6.); il qual era distante dallo scannello NO once $32\frac{1}{2}$ del piede di Parigi, equivalenti a linee 390, attaccai primieramente ad essa corda il peso P di libre 2., e segnai con inchiostro il punto B, in cui la corda toccava lo scannello NO. Applicai poscia alla corda il peso P+p uguale a libre 2+4 = 6; ed osservai, che il punto B era disceso sotto dello scannello NO linee $1\frac{3}{8}$. Aggiunto poi al peso P = 2 il peso p = 8, onde il peso totale P+p fosse di libre 10, cagionò esso peso aggiunto 8 la distensione di linee $2\frac{3}{4}$, la quale era doppia di quella prodotta dal peso aggiunto 4. Nell'equazione segnata (1.) si faccia $L = 390$, $P = 2$, $l = 1\frac{3}{8}$, $p = 4$, dati somministratici dalla prima esperienza, e troveremo il valore della rigidità della corda tesa dal peso P = 2, cioè a dire $h = 1174 + \frac{37022}{84761} = 1174 + \frac{7}{16}$. Dopo ciò nell'equazione segnata (2.) si ponga in cambio di h il ritrovato valore, L = 390, P = 2, p = 8 peso aggiunto adoperato nella seconda esperienza, e si scoprirà l'allungamento generato dal peso p = 8, vale a dire $l = 2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{207}$. Avendo colla esperienza rinvenuto $l = 2\frac{3}{4}$, giudichi il Lettore, se si può sperare maggiore accordo fra il

nostro

nostro canone, e l'esperimento, consistendo tutto il divario in $\frac{1}{203}$ di linea, minuzia totalmente inosservabile.

XIX. Merita riflessione la rigidità grande delle corde di metallo. La rigidità della nostra corda di ottone equivale a libre $1134 + \frac{7}{13}$. La maniera, con cui si lavorano le corde sonore, aumenta moltissimo la loro rigidità. Diventano esse così sottili, passando innumerabili volte per trafila, che sempre più le costipa, ed irrigidisce.

L'essere la rigidità h assai grande in relazione ai pesi adoprati nelle due sperienze, si è il motivo, per cui le distensioni $1 + \frac{3}{8}$, $2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{203}$ sono adequatamente come i pesi aggiunti 4, 8. Fingasi h infinita, nel qual caso sarà infinitesimo l'allungamento l prodotto dal peso aggiunto p, che si suppone finito. Nell'equazione (1.) si cancellino tutti i termini relativamente nulli, e resterà $h = \frac{pL}{l}$, e conseguentemente $l = \frac{Lp}{h}$, da cui si deduce, che essendo $\frac{L}{h}$ quantità costante, le distensioni l stanno sempre come i pesi aggiunti p: Or ecco la ragione, per cui essendo la rigidità h assai grande in riguardo ai pesi usati nella sperienza, si siano trovati gli allungamenti nella stessa adequata proporzione dei pesi aggiunti.

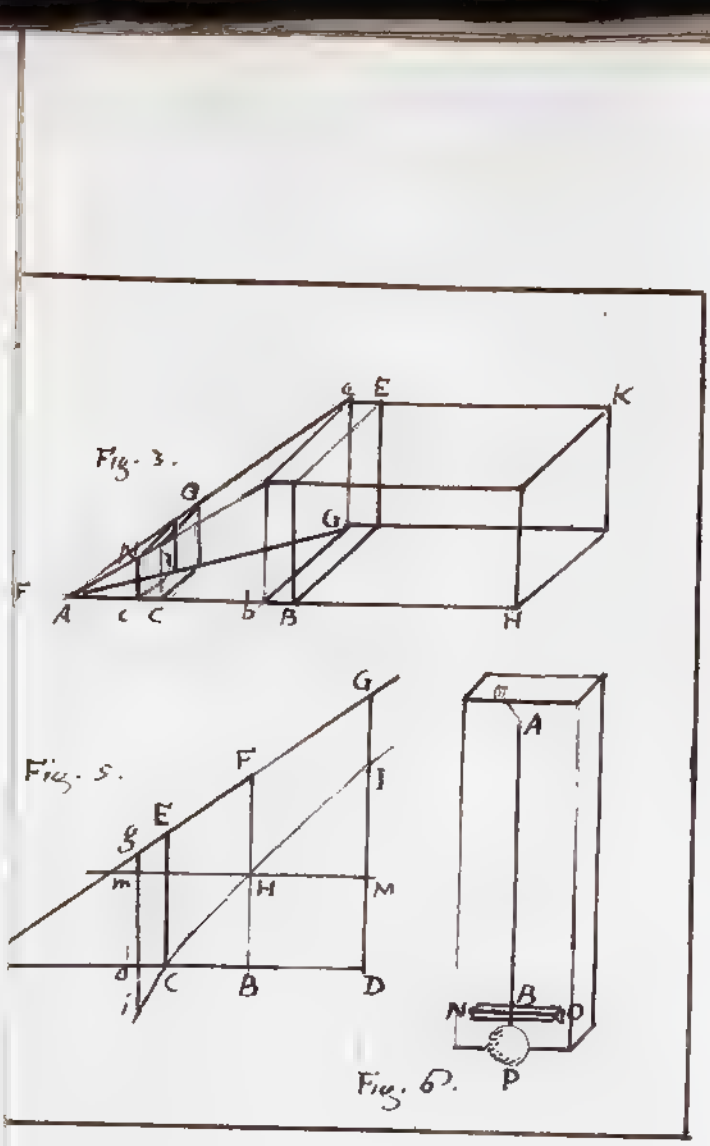


Fig. 3.

Fig. 5.

Fig. 6.

Annotazione allo Schediasma XXVI.

Della proporzione che passa fra le affezioni sensibili,
e la forza degli obbietti esterni, da cui
vengono prodotte. Contenuta nel Tomo III.
Delle Opere del Conte Jacopo Riccati
pag. 287. In Lucca
presso Jacopo Giusti
1764

Annotazione allo Schediasma XXVI.
Della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono prodotte. contenuto nel Tomo III. della Opera del Co. Jacopo Riccati pag. 267. In Lucca MDCCLXIV. Appresso Jacopo Giusti. In 4.to

I. Si ristringe l'Autore a varie ipotesi nel premesso Schediasma, e primieramente suppone, che la forza $DH = f$ (fig. x) dell'obbietto esterno agisca tutta raccolta nel punto medio C della fibra $AB = 2L$; di modo che essa fibra in virtù dell'azione della forza DH prenda la figura triangolare ADB. Suppone in secondo luogo, che essendo nulla la forza P tendente la fibra nella sua naturale positura ACB, la distensione $CD = l$ sia prodotta dalla forza DI nascente dalla nota risoluzione della forza DH. Suppone finalmente, che gli allungamenti $CD = l$ serbino sempre la ragione delle potenze DI. Ora giacchè mi è riuscito nell'Annotazione allo Schediasma XXIII. di scoprire la vera relazione fra le distensioni $CD = l$, e la forza, che direttamente le genera; ho presa risoluzione di maneggiare la cosa con maggior generalità, non ritenendo, salvo che la prima fra le tre supposizioni del Conte Jacopo.

Trovare la proporzione fra la saetta, e la forza applicata a squadra alla metà della corda appoggiata a due scannelli, e raccomandata a due chiodi immobili.

II. Al punto di mezzo C della corda $AB = 2L$ raccomandata a due chiodi immobili A, B, e tesa da una forza equivalente al peso dato P, si applichi con direzione normale ad AB la forza $DH = f$, la quale produca la saetta $CD = S$; si cerca la relazione fra la forza f, e la saetta S.

Tolta in prestanza la preparazione del nostro Autore, rifletto, che la semicorda $BD = BC + CD = L + l$ è tesa nella positura ADB da una forza, o peso $DI = P + p$ maggiore di quello eguale a P, che la stirava nella direzione ACB, per la quantità accresciuta p, da cui, conformemente a ciò, che ho spiegato nella citata Annotazione, è

è stato prodotto l'allungamento AD. Chiamisi h la rigidità naturale della corda nel sito ACB, e la mentovata Annotazione c'insegna essere $\frac{1}{2}h + P \cdot \frac{L+l}{L} - \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l} = P+p$ (1.). La similitudine de' triangoli BDC, IDG suggerisce l'analogia DG : DI :: DC : DB, da

$\frac{1}{2}f : P+p :: S : L+l$

cui deducesi l'equazione $\frac{\overline{P+p} \cdot S}{L+l} = \frac{1}{2}f$ (2.). Finalmente il triangolo rettangolo BCD ci somministra la formola $BD = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2}$

$L+l = \sqrt{L^2+S^2}$ (3.)

Nell'equazione (2.) in cambio di $P+p$ si sostituisca il suo valore preso dall'equazione (1.), e si avrà, adempiuti i necessarj calcoli, $\frac{\overline{h+2P} \cdot S}{L} - \frac{hLS}{\overline{L+l}^2} = f$. In vece di $L+l$ pongasi il suo valore contenuto nell'equazione (3.), e si scoprirà

$\frac{\overline{h+2P} \cdot S}{L} - \frac{hLS}{L^2+S^2} = \frac{2PS}{L} + \frac{hS^3}{L^3+LS^2} = f$ (4.), formola, che esprime la relazione cercata fra la saetta S, e la forza f, che la producono.

III. Per maggiormente confermare la verità della nostra formola, poniamola al cimento dell'esperienza. Da essa formola si deduce quest'altra $h = \frac{L^3f + LfS^2 - 2PL^2S - 2PS^3}{S^3}$ (5.). Ora perchè qualunque benchè menomo sbaglio, che si commetta nel misurare la saetta S, porta grandissimo divario nel valore della naturale rigidità h della corda ACB tesa dalla forza equivalente al peso P; fa di uopo rettificar il valore della saetta S prodotta dalla forza f, paragonando insieme i suoni delle due semicorde CB, DB. Il suono, o numero n di vibrazioni, che fa la corda CB per esempio in un secondo, s'uguaglia all'unità divisa pel tempo t, durata di una di esse vibrazioni espressa in parti di secondo, onde abbiasi l'equazione $n = \frac{1}{t}$. Ma nelle corde, [illegible] chordi di massa m, che si vibrano di traverso: $t = \frac{\sqrt{Lm}}{\sqrt{P \cdot 36\frac{17}{24}}} \cdot \frac{113}{355}$, dinotando la quantità $36\frac{17}{24}$ la lunghezza di un pendolo a secondi, e $\frac{113}{355}$ la proporzione del diametro al circolo; dunque $n = \frac{\sqrt{P \cdot 36\frac{17}{24}}}{\sqrt{Lm}} \cdot \frac{355}{113}$. Ed avvegnachè rispettivamente a qualunque corda le grandezze $36\frac{17}{24}$, $\frac{355}{113}$ sono sempre costanti; ne segue che generalmente il suono n è come $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Lm}}$. Se il peso, o forza tendente P si mantiene costante, e la massa m della corda sta come la lunghezza L, il che interviene nelle

corde

Schediasma XXVI.

corde, che non differiscono, salvo che nella lunghezza, allora si trova n come $\frac{1}{L}$, o sia il suono in ragione inversa della lunghezza della corda. Se la massa m non si diversifica, il che succede nelle semicorde CA, DB, in tal caso si scopre n come $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{L}}$, cioè in ragione composta, diretta dimezzata della forza tendente P, ed inversa parimente dimezzata della lunghezza L. Ho notate queste due circostanze; perchè verranno a taglio nelle nostre sperienze:

IV. Si determinerà la proporzione fra i suoni n, N delle corde CB, BD col seguente metodo. Si prenda una corda acb (fig. 2) unisona alla ACB, si sottoponga ad essa uno scannello d in sito tale, che le corde db, DB si corrispondano all'unisono, e ne seguirà, che i suoni n, N staranno fra loro in ragione inversa di cb : db, onde si verifichi l'analogia $n : N :: db : cb$.

La dimostrazione è semplicissima. I suoni delle due corde cb, db tese dallo stesso peso, e che non differiscono salvo che in lunghezza, serbano la ragione inversa delle lunghezze cb, db, che è quanto a dire si corrispondono nella proporzione db : cb: ma le corde cb, db sono unisone alle corrispondenti CB, DB; dunque i suoni n, N di queste ultime stanno come db : cb; il che ec.

V. Insegnata la maniera di scoprire la proporzione fra i suoni n, N, mi rivolgo ad indagare, come per la spezie n, N, e per le altre quantità date si possa esprimere il valore della saetta CD = S. Essendo pari la massa delle corde CB, AD, le lunghezze come $L : L+l$, e i pesi tendenti come $P : P+p$, avremo per la cosa detta nel numero III. $n : N :: \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{L}} : \frac{\sqrt{P+p}}{\sqrt{L+l}}$, o sia $n^2 : N^2 :: \frac{P}{L} : \frac{P+p}{L+l}$: ma qualmente si è fatto vedere al numero II., $\frac{P+p}{L+l} = \frac{\frac{1}{2}f}{S}$; dunque sostituito questo valore in cambio di $\frac{P+p}{L+l}$ nella sovrapposta analogia, si avrà $n^2 : N^2 :: \frac{P}{L} : \frac{\frac{1}{2}f}{S}$, e conseguentemente l'equazione $\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fL}{2P} = S$ (B).

VI. Al punto medio C della corda di ottone AB situata orizzontalmente, la cui semilunghezza CB = 30 mezz'oncie, e la forza tendente P equivalente ad oncie 140., attaccai il peso, o forza DH = f = 4., la quale produsse la saetta CD = S, che con diligente misura trovai eguale a $\frac{3}{7}$. I suoni n, N delle semicorde CB, DB, usato il metodo esposto al numero IV., li ritrovai corrispondersi

nella

nella ragione 119 : 120. Quindi si verificava essere $n^2 : N^2 ::$ $\widehat{119} : \widehat{120}$, o sia prossimamente 118 : 120 :: 59 : 60, e passando all'equazione, $\frac{n^2}{N^2} = \frac{59}{60}$. Sostituiti nella formola del numero precedente $\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fl}{2P} = S$ in vece di $\frac{n^2}{N^2}$, di f, di L, e di $2P$ i valori somministratici dalla sperienza, avremo $S = \frac{59}{60} \cdot \frac{4 \cdot 30}{2 \cdot 140} = \frac{59}{140} = \frac{3}{7} - \frac{1}{140}$. La frazione $\frac{1}{140}$, per cui la saetta rettificata differisce da quella, che si è scoperta colla misura, sfugge la più scrupolosa diligenza di chi esperimenta, consistendo in $\frac{1}{24}$ di linea. Fatto uso del valore purificato della saetta $CD = S = \frac{59}{140}$ nella formola (5.), si troverà dopo i necessarj computi $h =$ ad once 24054 = a libre $2004\frac{1}{2}$, valore della rigidità naturale della corda ACB corrispondente al peso, o forza tendente $P =$ ad once 140.

VII. Applicai al punto medio C della corda ACB la forza $f = 15 \frac{3}{5} = \frac{78}{5}$, la quale cagionò la saetta $CD = S$, che accuratamente misurata si trovò uguale a $\frac{7}{5}$. I suoni n, N delle due semicorde CB, DB serbavano la proporzione 11 : 12. Se col mezzo della relazione de' suoni cercheremo il valore della saetta, scopriremo $CD = S = \frac{1573}{1120} = \frac{7}{5} + \frac{1}{224}$. La differenza $\frac{1}{224}$ si sottragge all'attenzione de' più circospetti osservatori. Sostituiscasi nella formola (5.) in cambio di h il valore determinato nel numero antecedente, ed in vece di L, f, P la grandezza 30, $\frac{78}{5}$, 140 giusta la presente sperienza, e poste in opera le regole per isciogliere le equazioni cubiche, ci si presenterà $S = \frac{211}{150} = \frac{7}{5} + \frac{1}{150}$. La 150ma parte di mezz'oncia consiste in $\frac{1}{25}$ di linea, divario totalmente inosservabile. Molto minore si è la differenza fra i due valori $\frac{211}{150} = \frac{7}{5} + \frac{1}{150}$, $\frac{1573}{1120} = \frac{7}{5} + \frac{1}{224}$, il primo somministratoci dalla nostra equazione, ed il secondo ricavato dalla proporzione fra i suoni delle due semicorde CB, DB. Chi volesse schivare l'imbroglio di diciferare la sovrapposta equazione (5.) cubica, tenga un metodo inverso, e supposta $S = \frac{211}{150}$, cerchi il valore della rigidità h, che troverà uguale ad once 24013, e pochissimo differente dall'altro determinato nel numero precedente uguale ad once 24054. La cagione di questa diversità dipende da qualche piccola adequazione usata nello stabilire la grandezza della saetta $S = \frac{211}{150}$.

VIII.

VIII. Quanto inosservabile è la differenza fra la saetta scoperta colla misura, e quella, che abbiamo dedotta dalla nostra equazione, altrettanto riesce menomissima l'alterazione, che la saetta $S = \frac{211}{150}$ introduce nella proporzione dei suoni n, N, che si è rinvenuta come $11 : 12$. Giacchè nel numero (V.) abbiamo dimostrato essere $\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fL}{2P} = S$, avremo per conseguenza $\frac{n^2}{N^2} = \frac{2PS}{fL}$; e fatti $P = 140$, $S = \frac{211}{150}$, $f = \frac{78}{5}$, $L = 30$, si troverà $\frac{n^2}{N^2} = \frac{1477}{1755}$. La differenza fra le ragioni $\frac{1477}{1755}$, $\frac{121}{144}$ somministrateci, quella dalla nostra formola, e questa dalla osservazione, consiste nella frazione $\frac{212688}{212355}$, che prossimamente equivale alla seguente $\frac{639}{638}$. Se dunque fra le proporzioni dei quadrati dei suoni n^2, N^2, una ricavata dalla formola, e l'altra scoperta colla esperienza, c'è il divario $\frac{639}{638}$, fra le ragioni dei suoni n, N passerà la differenza $\frac{638\frac{1}{2}}{638} = \frac{1277}{1276}$, la quale, adempiuti i dovuti calcoli, si trova equivalere alla decimasesta parte di un comma, minuzia, di cui l'orecchio non se ne accorge.

IX. Si conchiude, che l'esperienza conferma la verità della nostra teorica, andando essa d'accordo con quella maggiore fisica adeguazione, che in così fatte indagazioni può mai sperarsi. Noto per altro, che se alla metà della corda AB si applicassero forze notabilmente maggiori delle adoprate nell'esperimento secondo, ne risulterebbero saette alquanto più piccole di quelle, che richiede il mio canone; perchè in esso s'è trascurata la resistenza, che patisce la corda ripiegandosi ne' siti A, D, B.

X. Affine di internarmi più a fondo nel magistero della Natura, la quale ha collocate le fibre in maniera, che ricevano di traverso le impressioni degli oggetti esterni, darò prima la costruzione della formola (4.) $\frac{2P+h}{L} \cdot S - \frac{hLS}{L^2+S^2} = \frac{2PS}{L} + \frac{hS^3}{L^3+LS^2} = f$, e fatte le dovute considerazioni sopra la relazione fra la saetta S, e la forza f, che la producono, indagherò quali conseguenze derivino dalla varia modificazione delle costanti P, h, L, che dinotano la tensione, la rigidità, e la lunghezza della fibra AB, mentre si trova in linea retta. Mi rivolterò poscia ad esaminare con simil metodo la proporzione fra la forza f, e le aumentazioni di tensione p da essa cagionate nella fibra AB.

XI. Segnata a squadra (Fig. 4.) le linee $CZ = L$, $ZK = 2P+h$, pei punti C, K si tiri la linea CK, che si continui indefinitamente, ed a questa facciasi perpendicolare KT, che taglia la linea CZ prodotta nel punto T. Col vertice C, parametro CT, e colla condizione, che le coordinate formino l'angolo CKZ, descrivasi la parabola Apolloniana CQV. Si segni arbitrariamente l'assissa CG, e condotta l'ordinata GQ, che si continui in D, si delinei $CB = L$ parallela a DG, e congiungansi con una linea i due punti B, Q. Si tagli $ZA = 2P$, onde resti $AK = h$, e si tiri AX normale a KT. Determinata $CR = KX$, e descritta RZ parallela a BQ, facciasi $HG = CZ$, ed il punto H apparterrà alla curva CHQ, che si vuol descrivere, di cui l'assissa $CD = S$, e la ordinata $DH = f$. Dal punto B si meni BP parallela a CK, e si continui DG sino in P [illegible]

Per la proprietà della parabola CQV si verifica l'equazione $\frac{\overline{CG}^2}{CT} = GQ$. La somiglianza dei triangoli CDG, CZK, CKT ci somministra le analogie $CD : CZ :: CG : CK$, $CD : CK :: CG : CT$. Dalla prima ricavo essere $CD : CK :: \overline{CD}^2 : CZ.CG$, e quindi la seconda prende il seguente aspetto $\overline{CD}^2 : CZ.CG :: CG : CT$, e mi dà l'equazione $\frac{\overline{CD}^2}{CZ} = \frac{\overline{CG}^2}{CT}$. Avremo dunque $GQ = \frac{\overline{CD}^2}{CZ} = \frac{S^2}{L}$. Aggiunta $GP = L$, si forma $PQ = L + \frac{S^2}{L} = \frac{L^2+S^2}{L}$. I triangoli simili QBP, RCZ suggeriscono l'analogia $PQ : PB = CG :: RC = KX : CZ$, da cui deducesi l'equazione $CZ = \frac{CG.KX}{PQ}$: ma stante la similitudine dei triangoli CDG, KXA, abbiamo $CD : CG :: KX : AK$, e conseguentemente $CG.KX = CD.AK$; dunque $CZ = HG = \frac{CD.AK}{PQ}$, o sia analiticamente $CZ = HG = \frac{hLS}{L^2+S^2}$. Finalmente l'analogia, che ci viene additata dai triangoli simili CDG, CZK, cioè a dire

$CZ : ZK :: CD : DG$

$L : 2P+h :: S : \frac{\overline{2P+h}.S}{L}$ determina il valore di $DG = \frac{\overline{2P+h}.S}{L}$. Avremo pertanto $DH = DG - HG = \frac{\overline{2P+h}.S}{L} - \frac{hLS}{L^2+S^2}$: ma $\frac{\overline{2P+h}.S}{L} - \frac{hLS}{L^2+S^2} = f$; dunque posta $CD = S$, sarà la corrispondente ordinata $DH = f$; il che ec.

XII. La nostra curva è fornita di un altro ramo simile al CHQ, nel quale tanto le saette S, quanto le forze f sono negative. Questo ramo serve per le saette Cd (Fig. 1.) della corda AB. La linea

Schediasma XXVI.

$HG = \frac{hLS}{L^2+S^2}$ (fig. 4.) ha un massimo valore $Ke = \frac{1}{2}h$ corrispondente a $CD = S = CZ = L$. In tale incontro la linea BQ tocca la parabola CQV nel punto V, e l'angolo CBQ, ed altresì l'uguale CAZ ascende al massimo; e massima conseguentemente diviene la grandezza $CZ = HG$.

Concciossiachè $DH = f = \frac{\overline{2P+h}.S}{L} - \frac{hLS}{L^2+S^2} = \frac{2PS}{L} + \frac{hS^3}{L^3+LS^2}$; e $DY = \frac{2PS}{L}$, formola nascente dall'analogia $CZ : CD :: ZA : DY$
$L : S :: 2P : \frac{2PS}{L}$
ne risulta $YH = \frac{hS^3}{L^3+LS^2}$, valore della intercetta fra l'inclinata CA, e la curva CHe.

Quando la saetta S sono minima, l'intercetta $YH = \frac{hS^3}{L^3+LS^2}$ scoprasi infinitesima del terzo grado, ed incomparabile con $DY = \frac{2PS}{L}$ infinitesima del primo grado. Cancellato adunque il termine relativamente nullo, ci si presenta $DH = DY = f = \frac{2PS}{L}$, ed in questo caso le saette sono come le forze, verificandosi la proporzione $L : 2P :: S : f$. Non trascurerò di avvertire, che la linea CA tocca la curva CHe nel punto C.

Se le saette divenissero infinite, ipotesi per altro, che non è fisica, trascurato il termine infinitamente piccolo $\frac{hLS}{L^2+S^2} = HG$, si troverebbe $DH = DG = \frac{\overline{2P+h}.S}{L} = f$, espressione, da cui dedurrebbesi l'analogia $L : 2P+h :: S : f$, la quale c'insegnerebbe, che anche in tal circostanza le saette serberebbero la ragione delle forze. Egli è facile da scoprire, che la linea CK serve di assintoto alla curva CHeh, la quale giace tutta dentro l'angolo KCA.

XIII. Nei casi intermedj, mentre cioè le saette sono finite, meno crescono, o scemano le saette di quello crescono, o scemino le forze, che le producono, dovendosi per gradi passare dalla ragione $L : 2P$ alla più rimota $L : 2P+h$.

Per dimostrar ciò rigorosamente sia $CD = S$, e conseguentemente $DH = f = \frac{2PS}{L} + \frac{hS^3}{L^3+LS^2}$. Si segni $Cd = nS$, vale a dire in qualunque proporzione con CD, e si avrà $dh = Z = \frac{2PnS}{L} + \frac{hn^3S^3}{L^3+Ln^2S^2}$. Se la forza serbasse la ragione della saetta dovrebbe essere $nf = \frac{2PnS}{L} + \frac{hnS^3}{L^3+LS^2} = Z = \frac{2PnS}{L} + \frac{hn^3S^3}{L^3+Ln^2S^2}$. Ora io dico, che posto $n > 1$, e per conseguenza $nS > S$, è parimente $Z > nf$, e posto $nS < S$, è parimente $Z < nf$, laonde meno crescono, o scemano

la

la saetta di quelle crescano, o scemino le forze, che le producono.

Comincio dal provare, che ad $n > 1$ corrisponda $\mathfrak{F} = \frac{2PnS}{L} + \frac{hn^3S^3}{L^3+Ln^2S^2} > nf = \frac{2PnS}{L} + \frac{hnS^3}{L^3+LS^2}$. Se così è, tolto di mezzo il termine comune $\frac{2PnS}{L}$, resterà $\frac{hn^3S^3}{L^3+Ln^2S^2} > \frac{hnS^3}{L^3+LS^2}$, e dividendo per $\frac{hnS^3}{L}$, $\frac{n^2}{L^2+n^2S^2} > \frac{1}{L^2+S^2}$. Moltiplico ambo i ~~termini~~ membri per $\overline{L^2+n^2S^2} \cdot \overline{L^2+S^2}$, e mi si presenta $n^2L^2+n^2S^2 > L^2+n^2S^2$, e sottratta la quantità comune n^2S^2, $n^2L^2 > L^2$, e $n > 1$, conseguenza vera, e conforme alla ipotesi stabilita.

Se si supporrà $n < 1$, ne seguirà essere $n^2L^2 < L^2$; ed indi tornando indietro per la strada or ora calcata, si scoprirà $\mathfrak{F} = \frac{2PnS}{L} + \frac{hn^3S^3}{L^3+Ln^2S^2} < nf = \frac{2PnS}{L} + \frac{hnS^3}{L^3+LS^2}$.

XIV. Egli è per tanto manifesto, che stando dentro i limiti della quantità finita, meno crescono, o scemano le saette, di quelle crescano, o scemino le forze, che le producono: verità, che ottimamente si accorda colla esperienza. In fatti ci insegna l'esperimento sopra riferito al numero VI., che applicata al punto medio di una corda, la cui semilunghezza $L = 30$, la forza $f = 4$, producesse questa una saetta, che con diligente misura si trovò eguale a $\frac{3}{7}$. Col mezzo della proporzione fra i suoni della corda, mentre dimora in linea retta, e mentre sta in equilibrio colla forza f, la stessa saetta si scoprì eguale a $\frac{59}{140} = \frac{3}{7} - \frac{1}{140}$, e questo valore si è stabilito fisicamente giusto. Se le saette crescessero in proporzione delle forze, si determinerebbe la saetta S generata dalla forza $\mathfrak{F} = \frac{24}{5}$ colla seguente analogia $4 : \frac{59}{140} :: \frac{24}{5} : S = \frac{2301}{1400} = \frac{4}{5} + \frac{61}{280}$. Ricorrendo allo esperimento descritto al numero VII. osserviamo, che la forza $\frac{24}{5}$ cagionò una saetta, che o sia eguale a $\frac{3}{5}$, come si rinvenne colla misura, o a $\frac{3}{5} + \frac{1}{224}$, come si trovò col mezzo della proporzione dei suoni, è sempre notabilmente minore di $\frac{4}{5} + \frac{61}{280}$. Con ragione adunque ho poco fa asserito conformarsi colla esperienza la legge, che non oltrepassando i termini della grandezza finita, meno crescono, o scemano le saette di quello crescano, o scemino le forze, onde vengono generate.

XV. Mi innoltro alla conseguenza fisica, e noto, che mentre le forze sono minime anche fisicamente, producono saette

a

a se stesse proporzionali, e mantenendosi, come vedremo dappoi, adeguatamente costante la naturale tensione della fibra, fa questa le sue vibrazioni più, o meno estese nel tempo stesso, le quali risvegliano nell'anima sensazioni più, o meno forti, ma tutte aggradevoli. Che se la forza si aumenta soverchiamente, allora la fibra troppo si stira, e corre rischio di patir danno. Ad un tale inconveniente mette in parte riparo la legge, che mentre le forze non sono minime, più crescono le forze delle saette. La forza f generi la saetta S. Sia nS quella saetta, che comincia a danneggiar l'organo; e concossiaché ci vuole una forza maggiore di nf per produrre la saetta nS, ne segue, che la forza nf si dee contare nel numero di quelle, che non molestano la fibra.

XVI. Considero presentemente le alterazioni, che cagiona nella saetta S la varia grandezza della rigidità h. Presa nuovamente per mano la formola $\frac{nPS}{L} + \frac{hS^3}{L^3+LS^2} = f$, rifletto, che posta la saetta S infinitesima, e stando la rigidità h dentro i termini del finito, la linea $YH = \frac{hS^3}{L^3+LS^2}$ è incomparabile colla linea $DY = \frac{nPS}{L}$. Quindi in tal ipotesi, qualunque sia il valore finito della righidità h, la forza $f = DH = DY$ produrrà sempre la saetta costante $S = CD$.

Si fingano infinite le saette S, e allora si troverà $DH = DY$ $= f = \frac{nP+h}{L}.S$: formola, da cui si ricava, che nella detta circostanza più cresce o cala la rigidità h, di quello che al contrario calino, o crescano le saette S generate dalla forza invariabile f. Ciò tanto maggiormente si verifica, mentre si tratti di saette finite.

Che se queste si assumano minime fisicamente, quali sono, relativamente alla lunghezza delle fibre, le saette in esse operate dalle forze non nocive degli oggetti esterni; si cavi la conseguenza, che per diversificare notabilmente le saette prodotte da una forza data, bisogna, che le rigidità stiano fra loro in una proporzione molto lontana. L'esperienza ci insegna, che le sensazioni di un uomo adulto sono più vive di quelle di un vecchio, e meno vive di quelle di un giovane. Si inferisca dunque, che gran diversità v'ha da essere fra la rigidità della fibra di un adulto, di un vecchio, e di un giovane, e si ammiri l'artifizio dell'

Autore

Autòre della Natura, che ciò non ostante le sensazioni per una parte non isvaniscano, e per l'altra non divengan moleste. Merita di essere distintamente avvertita la bellissima proprietà, che i discapiti dell'organo superano di gran lunga quei delle sensazioni.

XVII. Sia S la minima saetta, sino a cui faccia di uopo incurvare una fibra di data massa, tensione, e lunghezza, perchè vibrandosi risvegli nell'anima una distinta sensazione. La forza f operi questa saetta nella fibra di un uomo adulto, la cui rigidità h. Per produrre la stessa saetta nella fibra di un uomo vecchio fornita di maggiore rigidità H, ci vorrà una forza più grande F. Quindi la forza primiera f genererà nella fibra del vecchio una saetta minore di S, a cui non corrisponderà sensazione distinta. In fatti osserviamo, che per farci intendere dai vecchi, bisogna alzare la voce, e che a quel lume fiacco, a cui legge un adulto non legge un vecchio. Per la stessa ragione un lume ancora più tenue basterà ad un giovane, e non ad un uomo adulto.

Ma questo vantaggio, che le fibre di un giovane siano più pieghevoli di quelle di un adulto, viene compensato dal maggior pericolo, che dalla troppa azione della forza esterna restino danneggiate. Suppongasi S la massima saetta, che non porta pregiudizio ad una fibra. Venga questa prodotta dalla forza f nella fibra di un adulto, la cui rigidità h: è egli è chiaro, che la stessa forza, innocente in riguardo all'adulto, recherà nocumento alla fibra più molle dell'uomo giovane, cagionando in essa una saetta maggiore di S, che si suppone la massima fra quelle, che all'organo non son nocive. Hanno sperimentato in Bologna, che l'empito della materia elettrica, che per lo più non apporta danno agli uomini di età consistente, riesce ai giovanetti sommamente pregiudiziale.

Le fibre degli uomini sani, ed adulti sono nell'ottimo stato di perfezione. Le ho il Sapientissimo Iddio dotate di quella rigidità conveniente, onde faccia in loro una impressione sensibile, ma non nociva, la forza ordinaria di quegli oggetti esterni, con cui siamo in commercio, e dai quali importa alla

nostra

nostra conservazione, ed al nostro ben essere, che ci accorgiamo. Prima di giugnere alla virilità, le fibre non sono ancora quanto basta robuste, per resistere a certa forza più vigorosa. Quando poi c'incamminiamo dalla virilità alla vecchiaja, il mondo sensibile (per valermi di una espressione, con cui dà fine il nostro Autore alla sua dissertazione) si va per noi successivamente, ed insensibilmente perdendo.

XVIII. Agli ammalati danno fastidio quegli oggetti, che in tempo di sanità riuscivano loro gratissimi. Nelle stanze degli infermi bisogna chiudere le finestre, parlar sottovoce; perchè la forza anche moderata della luce, e del suono gli offenda. Questi effetti credo, che poco, o nulla dipendendo dalla rigidità, che nelle fibre degli uomini infermi si scemi, traggano principalmente l'origine dal minoramento della forza de' muscoli, che pongono in tensione le fibre, la qual forza da me si esprima per la lettera P. Mi accingo dunque a far vedere a chi legge, quanto influisca nelle sensazioni l'alterazione d'un sì fatto elemento.

XIX. Supposta nulla la forza P, che stira la fibra, mentre si trova in linea retta; svanisca nella Fig. 4. la linea $ZA = nP$, e la linea CA cada sopra la CZ. Perciò in tale ipotesi avremo $YH = f = \frac{hS^3}{L^3+LS^2}$, e posto che S sia minima relativamente ad L, $YH = f = \frac{hS^3}{L^3}$, come ha trovato il Conte Jacopi nel suo Schadiasma.

Più conseguenze si posson dedurre dalla premessa formola, e primieramente per cagionare uguali saette in fibre di pari lunghezza, ci vorrebbero forze proporzionali alla rigidità. Che se la forza esteriore fosse costante, le saette starebbero inversamente come le radici cubiche della rigidità. Quindi si scopre quanto giovi alla buona economia delle sensazioni, che le fibre sian poste in tensione, avendo noi ha molto osservato, che la diversa misura della rigidità altera pochissimo le picciole saette, che dalle fibre tese nell'oscillare si scorrono [illegible].

Serbando le forze la ragione de' cubi delle saette, non si compierebbero in pari tempo le vibrazioni più o meno dilatate della stessa fibra; imperciocchè richiede necessariamente l'isocronismo, che le forze stiano come le saette, o come gli spazj da passarsi.

Finalmente

Finalmente le fibre non istirate riuscirebbero inettissime per oscillare; perchè in una vibrazione s'impiegherebbero un tempo infinito. Fingasi tutta raccolta nel punto D la massa della corda ADB (Fig. 3.) il che non turba l'essenziale delle deduzioni. La scala delle forze sollecitanti riferite alle saette, o sia agli spazj da percorrersi sarebbe la parabola cubica CnN corrispondente all'equazione $\frac{L^3}{h}\cdot f = S^3$, le cui ordinate DN, che esprimono la forza, e le assisse DC, dC le saette. Sanno i Geometri, che la forza viva acquistata dalla corda AB, quando è ritornata nella positura ACB, s'agguaglia all'aja CDNnC, la qual è proporzionale a $\overline{DC}^4$, ch'è quanto a dire ad una flussione infinitesima del quarto grado. Essendo finita la massa della corda concentrata in D; ne segue, che il quadrato della velocità nel sito C deve esprimersi al quarto ordine delle quantità minime, e che per conseguenza la detta velocità spetta al secondo grado degli infinitamente piccoli. Ora con una velocità, che al più giunge ad essere infinitesima dell'ordine secondo, non si può passare lo spazio DC minimo del primo grado, salvo che in tempo infinito. Se alle saette infinitesime si sostituiranno le fisicamente minime, agevolmente ci accorgeremo, che rimossa dalla linea retta ACB una fibra priva di tensione, si fermerebbe senza restituirsi nella situazione ADB.

XX. Abbandonata un'ipotesi non accettata dalla Natura, consideriamo variabile sì, ma sempre finita la forza tendente P. Se le saette sian minime, la formola $\frac{2PS}{L} = f$ mi insegna, che prese come costanti la forza estrinseca f, e la lunghezza L della fibra, le saette S stanno reciprocamente come le forze tendenti P.

Supponendo infinite le saette, si verifica l'equazione $\frac{2P+h.S}{L} = f$, da cui possiam ricavare, che essendo date le quantità h, f, L, le saette S abbracciano la ragione inversa della somma della doppia forza tendente P, e della rigidità h. In tale circostanza meno crescono, o calano le saette, di quello che al contrario calino, o crescano le forze tendenti. Le saette pertanto, per cui si ripiegano le fibre, s'accostano molto più al minimo, che all'infinito, e perciò quasi colla stessa proporzione, onde si minorano, o si aumentano

la

le tensioni, tutte e vivacità si aumentano, o si minorano le saette. Quindi fondatamente ho asserito al numero XVIII., che quel fastidio, che recano agli ammalati certi oggetti loro aggradevoli in tempo di sanità, dipende principalmente dallo sminuimento della forza tendente.

Se la tensione s'ingrandisca smoderatamente (messo da parte il danno, che potrebbe patir la fibra) le impressione della forza f scemerebbe talmente, che o fievolissime, o nulle si risveglierebbero le sensazioni nell'anima.

Non tralascio di avvertire, che se alquanto meno crescono, o calano le saette, di quello che al contrario calano, o crescono le tensioni, egli è tutto frutto della rigidità della fibra, tolta di mezzo la quale, svanirebbe nell'equazione $\frac{2PS}{L} + \frac{hS^3}{L^3+LS^2} = f$ il termine $\frac{hS^3}{L^3+LS^2}$, e le saette seguirebbero esattamente la proporzione reciproca della forza tendente.

XXI. I tempi delle vibrazioni di due corde ugualmente lunghe, e di pari massa stanno inversamente come le radici delle forze tendenti. Perciò se decrescerà notabilmente la tensione della fibra, oscilleranno queste più lentamente. Da un tal principio penso, che proceda quella languidezza, che si osserva negli occhi de' moribondi.

XXII. Se le fibre sien simili, tese da forze proporzionali alle loro basi, composte di materia ugualmente rigida, e fornite di massa proporzionale a quella degli organi, a cui devono partecipare il moto; finalmente della varia lunghezza nulla influisca nella vivacità delle sensazioni. Le masse delle nostre fibre si corrispondono nella proporzione dei cubi delle lunghezze, le superficie e le basi nella proporzione dei quadrati. Ed atteso che le tensioni P, e le rigidità h stanno come le basi; ne segue, che da loro la ragione dei quadrati L^2 delle lunghezze viene abbracciata. Nella stessa proporzione si conferiscono parimente le forze esterne; imperciocché a misura delle superficie ricevono le fibre le impressione degli oggetti, qualmente al numero VI riflette ottimamente l'Autore.

Ciò premesso dico, che le saette serbano la ragione delle lunghezze. In grazia della semplicità mi servo di una dimostrazione indiretta. Sia dunque $S=nL$, cioè le saette come le lunghezze,

e

e sostituito questo valore nella formola $\frac{2PS}{L} + \frac{hS^3}{L^3+LS^2} = f$, troveremo $2nP + \frac{n^3}{1+n^2} \cdot h = f$: ma i coefficienti $2n$; $\frac{n^3}{1+n^2}$ sono quantità costanti, e tanto le tensioni P, quanto le rigidità h stanno come L^2; dunque f come L^2: conseguenza, che va di accordo col Savi.

Si potrebbe agevolmente provare, che i tempi delle vibrazioni delle nostre fibre, anche per saette, che non sien minime, seguano la ragione della lunghezza di esse fibre, e si caverebbe poscia la conseguenza, che essendo i tempi proporzionali agli spazj, che si scorrono, e crescendo, o calando le velocità con pari legge, si trovano queste uguali in siti analoghi, di modo che le forze vive acquistate dalle fibre seguitano la proporzione delle loro masse. Ora dovendosi comunicare il moto ad organi, la cui massa è proporzionale a quella delle fibre, acquisteranno essi pari velocità, alle quali corrisponderanno sensazioni egualmente spiritose.

XXIII. Se le stabilite misure delle forze stiranti, e delle rigidità si suppongano variate, vagliono le stesse conseguenze da me dedotte, mentre ho trattato delle fibre di eguale massa, e lunghezza, ma diversamente rigide, e tese. Data la riflessione, che la materia componente le fibre dei fanciulli è più molle di quella, onde constano le fibre degli adulti, si conchiuderà, che le sensazioni dei primi sono più vive di quelle dei secondi.

XXIV. Ne risulterebbero sensazioni diversamente vivaci, quando le masse delle fibre simili, rigide, e tese proporzionatamente, non si corrispondessero come le masse degli organi, a cui deve passare il tremito. Le fibre di maggior, o di minor massa relativa sveglierebbero più, e meno brillanti le sensazioni.

XXV. Resta, che si dica qualche cosa delle fibre dissimili. Considerando la dissomiglianza nelle basi o troppo grandi, o troppo picciole, le quali hanno parte nella determinazione della rigidità, egli è facile lo stabilire la proporzione della forza estrinseca, e delle saette. Bisognerebbe poscia computare le forze vive guadagnate dalle fibre, e paragonarle colla massa degli organi, ai quali devono partecipare il moto, per dedurre la relazione fra l'energia delle sensazioni. Intanto mi contenterò di notare col Conte Jacopo, che in quella guisa, che negli uomini di rado si trovano due volti

affatto

affatto simili; si deve credere, che per lo più le loro fibre siano di differente struttura, e che ognuno abbia al pari della fisonomia la sua particolari sensazioni.

XXVI. Esaminata quanto basta la proporzione fra le forze f, e la saetta S, mi accingo a confrontare colla stessa forza gli accrescimenti di tensione p, ch'essa producono nelle fibre. Gioverà questo paragone per indagare la fatica, che soffre l'organo, la quale sta in ragione composta, diretta della aumentazione di tensione p, ed inversa dalla forza P dei muscoli stiranti le fibre, cioè a dire come $\frac{p}{P}$.

Trovare la relazione tra la forza applicata a squadra al punto medio di una fibra, e gli accrescimenti di tensione, ch'essa nella detta fibra cagionano.

Ripetuta la curva $CHah$ (fig. 5.), la cui assissa $CD = S$, e la ordinata $DH = f$, tiro a squadra di CD, e parallela a DH la linea $CB = L$. Condotta poscia la diagonale BD, e segnata $CN = \frac{1}{2}DH = \frac{1}{2}f$, descrivo NO parallela a DB. Nella HD prorogata taglio $DI = NO$, e pel punto I, e per altri similmente determinati, fatta passare la curva MIi, dico, che l'ordinata DI esprime l'intera tensione $P+p$, che patisce la corda CB, dopo che la forza DH ha in essa operato la saetta CD; e che per conseguenza, sottratta $DR = P$, e delineata MRr parallela a CD, il residuo RI si agguaglia all'accrescimento di tensione p causato nella mentovata corda dalla forza DH.

Dai triangoli simili CDB, CNO si ricava l'analogia

$CD : DB :: CN = \frac{1}{2}DH : NO = DI$

$S : \overline{L+l} :: \frac{1}{2}f : \frac{\frac{1}{2}f \cdot \overline{L+l}}{S}$, che ci addita il valore di $DI = \frac{\frac{1}{2}f \cdot \overline{L+l}}{S}$: ma per l'equazione (a) contenuta nel numero II. $\frac{\overline{P+p} \cdot S}{L+l} = \frac{1}{2}f$, o sia $\frac{\frac{1}{2}f \cdot \overline{L+l}}{S} = P+p$; dunque $DI = P+p$; il che &c.

XXVII. Egli è chiaro in primo luogo, che quando si agguagliano a nulla la forza DH, e la saetta CD, è nullo parimente l'accrescimento di tensione RI, e però la nostra curva passa pel punto M.

In grazia della conseguenza stimo opportuno di porre sotto gli occhi di chi legge la formola, in cui non si contengono, salvo che le due incognite f, p. Nell'ultima equazione si collochi in cambio di S il suo valore $\sqrt{2L\overline{l}+l^2}$, onde si abbia $\frac{\frac{1}{2}f \cdot \overline{L+l}}{\sqrt{2L\overline{l}+l^2}} = P+p$. Maneggiata questa

e

a dovere, si troverà $L+l = \frac{L.\overline{P+p}}{\sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{4}f^2}}$ (7.). Una tal espressione di $L+l$ si sostituisca nella formola (2.) $\frac{1}{2}\overline{h+P}.\frac{L+l}{L} - \frac{1}{2}h\frac{L}{L+l} = P+p$. dalla quale abbiamo fatto uso nel numero II., e ne risulterà
$\frac{\frac{1}{2}\overline{h+P}.\overline{P+p}}{\sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{4}f^2}} - \frac{\frac{1}{2}h\sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{4}f^2}}{P+p} = P+p$, ed adempiuti i necessarj calcoli
$P\frac{+hf^2}{4.\overline{P+p}^2} = \sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{4}f^2} = CO$ (8.).

A buon conto si noti, che restando esclusa dalla formola la specie L, la varia lunghezza della fibra non ha per se stessa luogo nel determinare l'accrescimento di tensione p, il quale, essendo il resto pari, si scoprirà sempre costante, qualunque sia la lunghezza della fibra. Ho detto per se stessa; perchè, come si è veduto nel num. XXII. la lunghezza della fibra c'entra nello stabilire la misura della forza esteriore f.

Quando è minima la forza f, si trova $\sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{4}f^2} = P+p - \frac{\frac{1}{8}f^2}{P+p}$. Averemo pertanto $P\frac{+hf^2}{4.\overline{P+p}^2} = P+p - \frac{f^2}{8.\overline{P+p}}$, o sia $\frac{\overline{h+P+p}.f^2}{8.\overline{P+p}^2} = p$, e cancellate le quantità relativamente nulle, $\frac{\overline{h+P}.f^2}{8P^2} = p$. Supponendosi data la grandezza $\frac{h+P}{8P^2}$, ne segue, che le aumentazioni di tensione p stanno come i quadrati f^2 della forza minima, onde vengono prodotte, e che conseguentemente appartengono al secondo ordine degli infinitamente piccoli.

Abbiamo avvertito al numero XII. essere la forza infinitesima $f = \frac{2PS}{L}$, e quindi ne dedurremo $\frac{\overline{h+P}.f^2}{8P^2} = \frac{\overline{h+P}.S^2}{2L} = p$. Impariamo da questa formola, che a $CD = S$ minima corrisponde $RI = p$ infinitesima del secondo grado, che la linea MR tocca la curva MIi nel punto m, e che la detta curva verrebbe combaciata nel nominato punto da una parabola Apolloniana, il cui vertice m, ed il parametro $\frac{2L}{h+P}$.

Immaginiamoci infinita la forza f, e dalla sola considerazione della figura ricaveremo, che siccome in tal caso $CD = S$ agguaglia adequatamente $DB = L+l$, non altrimenti $CN = NO$, ovvero analiticamente $\frac{1}{2}f = P+p$, e trascurata, se così piace, la quantità incomparabile P, $\frac{1}{2}f = p$, cioè a dire gli accrescimenti di tensione p come la forza infinita f, da cui sono cagionati. Il valore di $p = \frac{1}{2}f$ non resta in conto alcuno alterato dalla diversa misura della rigidità h, e della forza tendente P.

Nella supposizione, che abbiam per le mani, è $CO = \frac{1}{2}h+P$. E voglia il vero, giacchè per l'equazione (8.) $CO = P\frac{+hf^2}{4.\overline{P+p}^2} = \sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{4}f^2}$,

ne

ne risulta $\frac{1}{2}h + P = P + \frac{hf^2}{4\cdot\overline{P+p}^2}$, e conseguentemente $\frac{1}{2}f = P+p$. Pongasi in vece di $P+p$ il suo valore $\frac{1}{2}f$ nella formola $CO = P + \frac{hf^2}{4\cdot\overline{P+p}^2}$, e ne proverrà $CO = P+\frac{1}{2}h$, come si dovea ritrovare.

L'analogia $CB : CD :: CO : CN$ somministra l'equazione $L : S :: P+\frac{1}{2}h : \frac{1}{2}f$ sopra scoperta nel numero XII. conveniente alla forza infinita $\frac{\overline{P+\frac{1}{2}h}\cdot S}{L} = \frac{1}{2}f$. Sostituito in cambio di $\frac{1}{2}f$ il suo valore $P+p$, ci si presenta $\frac{\overline{P+\frac{1}{2}h}\cdot S}{L} = P+p$ espressione, da cui si raccoglie, che segnata $ZQ = \frac{Zk}{2} = P+\frac{1}{2}h$, e congiunti i punti C, Q con una linea, che si continui all'infinito, servirà questa di assintoto alla curva MII.

XXVIII. Avendo osservato, che posta f minima, la tensione aggiunta p è immensamente più picciola, e che divenendo f infinita, $p = \frac{1}{2}f$; ne dedurremo, che stando nei confini del finito, l'accrescimento di tensione p è sempre minore della metà della forza f. Questa riflessione ci addita il magistero ammirabile della Natura, la quale ha disposto, che le forze estrinseche agiscano travversalmente, e non direttamente nelle fibre degli organi. Se agissero direttamente, si aumenterebbe la tensione per l'intera forza f. Operando le forze esteriori di traverso, si accresce la tensione per la quantità p, che quando le fibre non restano molestate, è assaissimo minore di f, e che mentre f sia molto grande, non può mai giungere a pareggiarne la metà. Con sì stupendo artificio si mettono le fibre in un'agitazione spiritosa, atta a risvegliare nell'anima le sensazioni con pochissima alterazione della loro consueta tensione.

XXIX. Conciossiachè in un caso estremo stia p come f^2, e nell'altro p come f, si inferisca, che più crescono, o scemano le aumentazioni di tensione p, di quello che parimente crescano, o scemino le forze finite travversali.

Più conseguenze fisiche possono ricavarsi. E primieramente aumentandosi la forza esteriore, cresce, e con maggior proporzione la fatica dell'organo; e perciò quando la mentovata forza è troppo grande, e continuata, l'organo facilmente si stanca. L'assidua contemplazione dei luminosi corpi celesti affatica talmente gli occhi degli Astronomi, che a più d'uno è accaduto di rimaner privo della vista in tempo della vecchiaja.

Egualmente si passa dall'insensibile al sensibile, e a rovescio; dal

Dal piacevole al disgustoso, o a rovescio. All'accrescimento di tensione p non corrisponde sensazione. Se per eccitarla faccia bisogno l'ingrandimento di tensione 4p; si otterrà questo effetto con aumentare la forza trasversale f pochissimo più del doppio.

Nell'organo delicatissimo della vista, che ricoprendolo colle palpebre, o colle mani; o volgendo altrove la faccia, si difende dall'impeto di una luce troppo violenta, la Natura si serve di una bellissima industria, perchè non si passi con tanta facilità dal sensibile all'insensibile, dal grato all'ingrato. Consiste questa nel potersi allargare, o ristrignere il diametro della pupilla. Le dilatazioni, e i ristrignimenti si osservano grandissimi in quegli animali, che sono destinati a vedervi di giorno, e di notte. Se il lume infiacchisca, s'allarga assai la pupilla; e molto lume debole fa la stessa impressione, come un lume mediocre e di forza, e di quantità. Accrescendosi il rigore della luce, si ristrigne la pupilla, e la minore quantità compensa la forza maggiore. Anche gli altri organi avranno forse degli equivalenti artifizj, che non ci sono per anco noti.

XXX. Mi faccio ora a ponderare qual parte possa avere la diversa rigidità h della fibra nella fatica degli organi, la quale, supponendosi costante la forza tendente P, serba la ragione degli accrescimenti di stiramento p.

La formola propria della forza minima $\frac{\overline{h+P}}{4P^2}\cdot f^2 = p$ ci manifesta, che assumendosi come dato il coefficiente $\frac{f^2}{4P^2}$, le aumentazioni di tensione p, mentre la forza f sia picciolissima, stanno come la somma h+P della rigidità, e della forza stirante. In tale circostanza dunque la fatica dell'organo s'aumenta, o si minora proporzionatamente meno di quello cresca, o si diminuisca la rigidità.

S'è già avvertito al numero XXVII., che essendo infinita la forza f, la varia rigidità h della fibra nulla influisca nella misura dell'aumento di tensione $p = \frac{1}{2} f$.

Quindi una forza finita cagionerà incrementi di tensione, che all'ingrandire, o all'impicciolire della rigidità si troveranno meno diversi di ciò, che richiede la legge della forza minima.

Dalle premesse verità si desume la ragione, per cui un adulto più di un giovane, ed un vecchio più di un adulto è soggetto a stancarsi. Un adulto per modo di esempio non durerà tanto a leggere quanto un

giovane

giovane, né un vecchio quanto un adulto.

Per risparmiare frattanto più che fosse possibile agli organi la fatica, ha il Sapientissimo Iddio providamente ordinato, che gli accrescimenti di questa riescano a proporzione minori di quelli della rigidità.

XXXI. Di maggiore rilievo sono le conseguenze, che derivano dalle alterazione della forza tendente P.

Impariamo dalla formola spettante alla forza infinitamente picciola $\frac{h+P.}{8P^2}f^2=p$, che le aumentazioni di tensione crescono, o calano con proporzione più rimota di quella, onde al contrario calano, o crescono la forza tendente P. In fatti se h variasse nella stessa ragione di P, si troverebbe $\frac{h+P}{8P^2}$ come $\frac{1}{P}$, e l'accrescimento di tensione p starebbe inversamente come la forza stirante P. Ma supponendosi la rigidità h costante, ne segue, che se cala la forza tendente P, la somma h+P è proporzionatamente maggiore di P, e se la detta forza ingrandisca, la quantità h+P è a proporzione minore di P. Perciò veramente abbiamo asserito, che gli accrescimenti di tensione si corrispondano in una relazione più lontana della reciproca della forza tendente. E giacché la fatica dell'organo sta come $\frac{p}{P}$, si conchiude, che essendo minima la forza esteriore, più si aumenta, e si minora la fatica dell'organo di quello ricerca la ragione inversa duplicata della forza tendente.

Mi rivolgo all'opposto limite della forza f infinita, e supponendosi, che questa non patisca alterazione, sarà costante l'incremento di tensione $p = \frac{1}{2}f$. Per la qual cosa la fatica dell'organo $\frac{p}{P}$ serberà la ragione reciproca della forza tendente P.

Quindi possiamo sicuramente affermare, che quando è finita la forza f, la fatica dell'organo prende regola da una proporzione più lontana della inversa della forza stirante.

Ora si capirà la ragione, per cui alle donne infralite dal parto recente, nelle quali si è scemata la tensione della fibra, cagioni stanchezza, e fastidio la forza quantunque moderata del lume, del suono, e degli odori. Giovarà parimente a coloro, che si fan cavar sangue, il riparare gli occhi dalla luce soverchia, potendo questa produrre nella fibra meno tesa dell'organo della vista una impressione troppo grande, e nociva.

XXXII. Conchiuderò questa Annotazione coll'indagare, se la varia lunghezza della fibra rechi modificazione veruna alla fatica degli organi.

Posto che le fibre siano simili di figura, stirate da forze proporzionali alle loro basi, formate di materia egualmente rigida; le forze tendenti P, le rigidità h, e le impressioni f delle forze estrinseche stanno come L^2. Aggiungo, che ancora gli accrescimenti di tensione p abbracciano la medesima ragione. Mi servo in questo luogo altresì, come altrove ho praticato, di una dimostrazione indiretta. Supposti h, f, e P+p come L^2, cavo la proporzione di P, e trovandola anch'essa come L^2, inferisco, che se P serberà la ragione di L^2, verrà parimente

parimente questa eccitata da $P+p$, e conseguentemente ancora da p. Presa per mano la formola (4) $P + \frac{hf^2}{4.\overline{P+p}^2} = \sqrt{\overline{P+p}^2 - \frac{1}{4}f^2}$; osservo che nell'addotta supposizione ciascuno dei due termini $\frac{hf^2}{4.\overline{P+p}^2}$, $\sqrt{\overline{P+p}^2 - \frac{1}{4}f^2}$ sta come L^2, e perciò P, che si eguaglia alla differenza dei termini stessi, si scopre proporzionale ad L^2; il che &c.

Venendo la fatica dell'organo dinotata dalla frazione $\frac{p}{P}$, ed essendo nel nostro caso tanto il numeratore, quanto il denominatore come L^2; si raccoglie, che gli organi e grandi, e piccoli forniti della descritta proprietà sosterrebbero una pari fatica.

XXXIII. Che se le forze tendenti, e la rigidità non si corrispondono nella ragione delle basi delle fibre simili, si verificano le medesime conseguenze, che ho ricavate trattando delle fibre egualmente lunghe, e grosse, ma diversamente rigide, e tese. Essendo le fibre dei fanciulli proporzionatamente più molli di quelle degli uomini fatti, si capisce il perchè l'organo per esempio della vista si stanchi più facilmente in questi, che in quelli.

XXXIV. Relativamente a due fibre varie solo nella lunghezza, l'impressione f della forza esterna sta come L. Le cose dette nel numero XXIX. ci ammoniscono, che gli accrescimenti di tensione p proporzionali alla fatica del sensorio $\frac{p}{P}$ nella presente supposizione di P costante, abbracciano una ragione media tra f^2, ed f: ma le forze f serbano la relazione delle lunghezze L; dunque la fatica dell'organo seguita una proporzione di mezzo fra L^2, ed L.

Per la qual cosa paragonati insieme due sensorj composti di fibre del pari grosse, rigide, e tese, e diverse solamente nella lunghezza; quello sosterrà maggiore fatica, che sarà fornito di fibre più lunghe. Finisco colla riflessione, che dipendendo la fatica dell'organo dalla combinazione di più elementi; non ci dobbiamo maravigliare, se l'azione del medesimo obbietto esterno affatichi diversamente gli organi di uomini, quantunque sani, e che nel fiore dell'età si ritrovano.

Annotazione allo Schediasma XXXVI

Difesa del Cor. II. della Prop. XXXVI. del Libro II.
dei Principj Matematici della Filosofia
Naturale del Cav. Isacco Newton

contenuta nel Tomo III. dell'Opere del
Conte Jacopo Riccati pag. 421.
in Lucca
presso Jacopo Giusti
1764

Annotazione allo Schediasma XXXVI.
Difesa del Corollario II. della Proposizione
XXXVI. del Libro II. dei Principj Mate-
matici della Filosofia Naturale del Ca-
valiere Isacco Newton: contenuta nel
Tomo III. delle Opere del Co. Jacopo
Riccati pag. 425. In Lucca MDCCLXIV
Appresso Jacopo Giusti. In 4.to

Per mettere in un pienissimo lume la verità del Corollario Newtoniano sostenuta dal nostro Autore nel presente Schediasma, farò ricorso al metodo infallibile delle azioni, cioè a dire delle forze applicate agli spazj, illustrato dal Padre Vincenzo Riccati nel suo Dialogo delle forze vive; e dall'azione della forza morta.

Sia ACDB (Fig. 1.) un vaso cilindrico ripieno di acqua, e nel centro del suo fondo CD sia aperto un menomo foro QZ, per cui l'acqua trovi l'uscita. Ci insegnano i canoni idrodinamici, che le velocità del fluido dentro, e fuori del vaso stanno nella ragione inversa del fondo CD al foro QZ; di modo che la prima è piccolissima in paragone della seconda. Dovendosi passare per tutti i gradi dall'una all'altra velocità, la Natura forma in vicinanza del foro QZ il gorgo SMQZNT, che rende l'origine dal girare la figura SMQGZ intorno l'asse GZ, che passa pel centro G comune al buco QZ, ed al fondo CD del vaso. Rimane immobile l'acqua nei siti SMQC, TNZD, quasi che fosse solida, e l'acqua contenuta nel gorgo si va accelerando, a misura che fa transito per sezioni più ristrette MN.

Suppongasi, che la superficie AB del fluido sia calata abbasso per lo spazio minimo HQ, di modo che sia scaturita pel foro QZ la quantità di acqua AR. L'azione della gravità dell'acqua si sarà impiegata in tre effetti, cioè a dire nell'imprimere forza viva all'acqua contenuta nel cilindro PT, a quella contenuta nel gorgo SMQZNT, ed all'altra, parimente, eguale al cilindro AR, ch'è scappata fuori del vaso. Quanto più picciola quantità di fluido riempie il gorgo, tanto minore di esso fluido è la forza viva, e quanto minore è una tal forza viva, altrettanto maggiore

si è quella e dell'acqua PT dentro il vaso, e dell'acqua pari di mole al cilindro AR spicciata fuori pel buco. Quindi l'uscita del liquore è più veloce, e più copioso, ed un'azione più grande viene in pari tempo esercitata dalla gravità dell'acqua dentro il vaso rinchiusa. Egli è fuori di dubbio, che il peso dell'acqua, malgrado l'impedimento del vaso, tenta di effettuare la possibile massima azione. A tal oggetto dunque la Natura determina il gorgo SMCZNT di così piccola altezza ZG, che la forza viva dell'acqua, ch'esso comprende, possa trascurarsi fisicamente. Passando dal fisico al geometrico, si supporrà matematicamente minima la detta forza viva, e tale, che relativamente alla forza viva dell'acqua PT sia permesso trasandarla nei computi. A norma di tale supposizione m'innoltro allo scioglimento del seguente.

Problema I.

Determinare la velocità, colla quale esca l'acqua da un vaso cilindrico per un foro minimo circolare aperto nel centro del fondo del vaso stesso.

Nel primo istante del moto sia l'altezza dell'acqua HG = a, la base del vaso CD = b, il foro EZ = c. Cominci l'acqua a scaturire dal foro, ed essendosi abbassata per lo spazietto HQ = s, sia uscita dal vaso la porzione di fluido AR = bs = m. Chiamisi v la velocità del corpo di acqua PT, il quale si adegua al cilindro AD = ab, ed u la velocità della massa infinitesima bs uscita pel buco c.

Ricorrendo al nominato metodo delle azioni, e fatta la riflessione, che mentre il fluido ab è disceso per lo spazio s, la sua gravità ha esercitata l'azione abs, e supponendosi trascurabile la forza viva dell'acqua, che riempie il gorgo, avremo per la nota formola $abs = \underline{abv^2 + bsu^2}$ (1.): ma come abbiamo di sopra notato, le velocità v, u serbano la ragione inversa delle sezioni b, c; dunque si verifica l'equazione $\frac{cu}{b} = v$, e sostituendo questo valore nella nostra formola, ci si presenta $abs = \frac{ac^2 + b^2 s}{2b} \cdot u^2$.

La

Schediasma XXXVI.

La massa liquida ab si è mossa per lo spazio s, e l'acqua bs, che spiccia dal foro, si è conformata in un cilindro, la cui base c, e la lunghezza $\frac{bs}{c}$, che da me ponasi = z. Giacchè $\frac{bs}{c} = z$, ne risulta $bs = cz = m$ (2.) ed $abs = acz$. Si cavi la conseguenza importante, che all'azione abs, che segue in Natura, può con un gioco di metodo sostituirsi l'uguale acz, e in cambio di essa usarsi sicuramente. Surrogato in luogo di bs il suo valore cz, la nuova formola $az = \frac{ac+bz}{ab} \cdot u^2$ (3.) o sia $\frac{\sqrt{rabz}}{\sqrt{ac+bz}} = u$ (4.) esprimerà la relazione fra la velocità, e gli spazj scorsi dall'acqua cz, che esce dal vaso; il che &c.

Corollario I.

Nel principio del moto abbia corso l'acqua, che spiccia da'foro, uno spazio z talmente minimo, che sia la quantità bz infinitamente minore di ac. In questa ipotesi la formola (4.) si riduce alla seguente $\sqrt{ra \cdot \frac{bz}{ac}} = u$, ed agguagliandosi la frazione $\frac{bz}{ac}$ ad una grandezza immensamente piccola, manifestamente si scopre, che la velocità u pareggia una parte inassegnabile di quella celerità $\sqrt{ra}$, che viene in progresso dal fluido acquistata. La velocità per altro $\sqrt{ra \cdot \frac{bz}{ac}}$ conceputa dall'acqua cz uscita dal vaso è infinitamente maggiore di quella $\sqrt{rz}$, che avrebbe cagionata nell'acqua cz la sua gravità, essendo $\sqrt{ra \cdot \frac{bz}{ac}} : \sqrt{rz} :: \sqrt{b} : \sqrt{c}$. Questa riflessione ci fa toccare con mano, che la forza viva, ond'è fornita la massa cz, procede da un'azione incomparabilmente più grande di quella, che per lo spazio z sarebbe esercitata dalla gravità di essa massa.

Corollario II.

Inoltriamoci alla supposizione, che le grandezze ac, bz, e conseguentemente anche le due c, z (supponendosi finite le quantità a, b) si corrispondano in proporzione finita; e la formola (4.) $\sqrt{ra \cdot \frac{bz}{ac+bz}} = u$ ci addita, chiamando $\frac{bz}{ac+bz}$ quantità finita minore dell'unità, è parimente finito il valore della velocità u; ma però sempre più piccolo di $\sqrt{ra}$, al qual valore si va via più accostando, a misura che s'aumenta la grandezza bz relativamente ad ac. In questo incontro la forza viva dell'acqua uscita cz si agguaglia ad $acz \cdot \frac{bz}{ac+bz}$, e giacchè, siccome abbiamo

abbiamo notato, è finita la grandezza $\frac{bz}{ac+bz}$, ed una finita relazione passa fra le quantità c, z, la predetta forza serberà una ragione finita col quadrato c^2.

Corollario III.

Ma quando bz è divenuta infinita in riguardo ad ac, il che può succedere, anche mentre bz è grandezza minima, purchè s'agguagli ad $\overline{ac}^n$, e sia l'esponente n positivo, e minore dell'unità, in tal caso avremo $u = \sqrt{2a} \cdot \frac{bz}{ac+bz} = \sqrt{2a}$, e questo è il massimo valore, a cui può pervenire la detta velocità.

Si osservi potersi asserire con verità, che lo spazio z, quantunque menomo, sia stato passato con equabile velocità dall'acqua scaturita dal foro. Sia per esempio $z = \frac{\overline{ac}^{\frac{1}{3}}}{b}$: egli è manifesto per le cose dette, che mentre era $z = \frac{\overline{ac}^{\frac{2}{3}}}{b}$, la velocità u si agguagliava a $\sqrt{2a}$; dunque lo spazio $\frac{\overline{ac}^{\frac{1}{3}} - \overline{ac}^{\frac{2}{3}}}{b}$ si è scorso con velocità equabile: ma per adequazione $\frac{\overline{ac}^{\frac{1}{3}} - \overline{ac}^{\frac{2}{3}}}{b} = \frac{\overline{ac}^{\frac{1}{3}}}{b} = z$; dunque l'acqua si è mossa per lo spazio z con equabile celerità.

La forza viva dell'acqua cz scappata fuori, cioè a dire $acz \cdot \frac{bz}{ac+bz} = acz$, la scopriremo infinita relativamente a quella, ond'è fornita l'acqua, che si muove con velocità finita, ma non per anche ridotta equabile, la quale nel precedente Corollario abbiamo avvertito riferirsi a c^2 in proporzione finita.

Scolio I.

Nella formola (4.) $\frac{\sqrt{2aabz}}{\sqrt{ac+bz}} = u$ non ho messa a computo l'azione della gravità dell'acqua, dopo ch'è uscita dal vaso. Egli è d'uopo adunque fingere o che l'acqua scaturita resti priva di gravità, o pure che l'acqua, tosto che è scappata fuori pel buco, sia obbligata a voltar cammino lungo un canale orizzontale senza patire resistenza veruna.

Scolio II.

Presa la differenza nella formola (1.) $abs = \frac{abv^2 + bsu^2}{2}$, dopo averci messo sostituito in cambio di bs il suo valore cz, ci si presenterà $acdz = abvdv + czudu + \frac{cdzu^2}{2}$. L'azione adunque elementare $acdz$ cagiona tre effetti, accrescendo la forza viva nelle due masse ab, cz, ed imprimendo la forza

viva

viva $\frac{cdzu^2}{2}$ nella massa menomissima cdz, che durante la infinitesima azione $acdz$ spiccia novellamente pel foro. Quando il fluido è pervenuto ad una equabile velocità, i due primi effetti si annullano, essendo in tal circostanza tanto dv, quanto $du = 0$, e per conseguenza adempiesi l'equazione $acdz = \frac{cdzu^2}{2}$. Quindi nella detta ipotesi l'azione minima $acdz$ si impiega tutta nel generare la forza viva nell'incremento cdz della massa fluida cz uscita dal vaso. Anzi verificandosi nella nostra supposizione la formola $acz = \frac{czu^2}{2}$, si può asserire con geometrica adequazione, che quando la velocità del fluido è divenuta equabile, l'intera azione $acz = abs$ si è spesa nella forza viva della porzione di acqua cz scaturita dal vaso.

Dalle cose dette raccogliesi, che se ci proponessimo di ritrovare una forza f, che agendo liberamente per uno spazio elementare cagioni l'effetto $\frac{cdzu^2}{2}$, la totale azione di questa forza, quando l'acqua equabilmente si muove, pareggerà $acz = \frac{czu^2}{2}$; di modo che all'azione di essa forza si potrà attribuire tutto il moto dell'acqua uscita. Supponendo il Cavalier Newton equabile la velocità del liquore, egli è fuor di dubbio, che quelle parole del famoso suo Corollario, Vis, qua totus aquae exilientis motus generari potest &c alludono alla forza, di cui parliamo. Deve poi esser libera la detta forza; perchè potendo venir prodotta la detta forza viva $\frac{czu^2}{2}$ da infinite forze, ciascuna delle quali eserciti una azione uguale all'acz, e dicendo assolutamente il Sig.r Newton, Vis, qua totus aquae exilientis motus generari potest, in tutto la mentovata forza si dee intendere certamente quella unica libera, e non impedita, la cui azion elementare cagiona la forza viva $\frac{cdzu^2}{2}$ nella massa infinitesima cdz, non altrimenti che la gravità in un corpo, che discende per la linea del piombo.

Problema II.

Determinare la forza, che agendo liberamente, cagiona la forza viva nell'elemento di acqua, che nuovamente scaturisce da un vaso per un foro minimo in tempo infinitesimo

Conciossiachè $\frac{abz}{ac+bz} = \frac{u^2}{2}$, moltiplicando per le quantità eguali cdz

cdz, dunque avremo $\frac{acbzdz}{ac+bz} = \frac{dmu^2}{2}$. Lo spazio, pel quale agisca una forza costante libera, si agguaglia alla metà di quello, che nel tempo della durata dell'azione si scorre dalla massa dm colla velocità u acquistata in vigore di detta azione. Agendo per uno spazio minimo la forza, che noi cerchiamo, si può considerare come costante, e giacchè la massa $dm = cdz$ nel tempo, in cui segue l'azione, scorre lo spazio dz, la predetta forza a norma della cosa detta agisca per lo spazio $\frac{1}{2}dz$. Dividendo adunque per $\frac{1}{2}dz$ l'azione $\frac{acbzdz}{ac+bz}$, ne risulterà la forza continuamente applicata, che da me si nomina $f = \frac{2acbz}{ac+bz}$ (5.): il che &c.

Corollario I.

Se nel cominciamento del moto è bz infinitamente minore di ac, ci si presenta la forza $f = 2bz$. In tale incontro l'azione $\frac{fdz}{2} = bzdz$, che genera la forza viva $\frac{dmu^2}{2}$, è una parte minima dell'azione elementare $abds = acdz$, impiegandosi il rimanente, cioè per adequazione tutta l'azione acdz nell'aggregato dei due effetti nominati nel premesso Scolio II. $abvdv + czudu = \overline{ac+bz}.\frac{bvdv}{c}$, o per meglio dire nel solo incremento abvdv della forza viva del corpo d'acqua ab, essendo relativamente nullo l'altro effetto czudu.

Corollario II.

Sia lo spazio z cresciuto sì fattamente, che le quantità ac, bz si riferiscano in proporzione finita, ed interverrà, che l'azione $\frac{fdz}{2} = \frac{acbzdz}{ac+bz}$ serbi coll'azion elementare della gravità dell'acqua ab, cioè a dire con $abds = acdz$ la finita relazione, che passa fra le grandezze bz, ac+bz. Conseguentemente nel doppio effetto $abvdv + czudu = \overline{ac+bz}.\frac{bvdv}{c} = \overline{ac+bz}.\frac{cudu}{b}$ si spenderà l'azione $\frac{a^2c^2dz}{ac+bz}$. Mentre per esempio fosse $ac = bz$, si troverebbe $f = ac$, $\frac{fdz}{2} = \frac{acdz}{2}$, e ciascuno degli effetti abvdv, czudu, che in questa ipotesi sarebbero uguali, richiederebbe l'azione $\frac{acdz}{4}$. La velocità u dell'acqua uscita dal vaso si agguaglierebbe a $\sqrt{a}$.

Corollario III

Finalmente quando è bz infinita relativamente ad ac, il che può verificarsi stando ancora bz dentro i confini della quan-

tità

rità infinitesima, come abbiamo notato nel Corollario III. del Problema I., scopriremo $f = nac$. In tale circostanza la velocità u, colla quale l'acqua scaturisce dal buco, è divenuta equabile, e si agguaglia a $\sqrt{na}$, siccome appunto suppone l'incomparabile Sig. Newton. Or ecco adunque, che nella supposizione del grande Inglese la forza f pareggia la grandezza nac a norma della espressione del tanto dibattuto suo Corollario: Vis, qua totus aquae exilientis motus generari potest, aequalis est ponderi cilindricae columellae aquae, cujus basis est foramen EF (fig. 2.), et cujus altitudo est 2 GI, vel 2CK. Si asserisca allora con verità, che questa forza può generare tutto il moto nell'acqua, ch'esce dal vaso; imperciocchè essendo nella ipotesi di $u = \sqrt{na}$ lo spazio scorso z infinito relativamente a quello passato dall'acqua, mentre era u minore di $\sqrt{na}$ per una quantità finita minima a piacimento, l'azione acz si adegua a $\int \frac{cdz}{2}$, e rettamente si afferma, che la forza nac agendo per lo spazio $\frac{1}{2}z$ ha prodotto nella massa cz la forza viva $cz \cdot \frac{u^2}{2} = cz \cdot a$.

Impiegandosi tutta l'azione elementare del peso dell'acqua ab, vale a dire $abds = acdz$ nell'unico effetto $cdz \cdot \frac{u^2}{2} = cdz \cdot a$, chiara si scopre la nullità degli altri due effetti $abvdv$, $czudu$. E così infatti dee intervenire, perchè essendo le velocità v, u divenute equabili, si eguagliano a nulla i loro incrementi dv, du.

Per intero compimento della materia aggiungo la soluzione del seguente

Problema III.

Determinare la relazione fra gli spazj scorsi dall'acqua, che scaturisce da un vaso per un foro minimo, e i tempi impiegati a percorrerli.

Si nomini t il tempo consumato dal primo elemento di fluido uscito dal vaso a passare lo spazio z, ed essendo $\frac{dz}{u} = dt$, e per l'equazione (4.) $\frac{\sqrt{nabz}}{\sqrt{ac+bz}} = u$, scopriremo $\frac{dz\sqrt{ac+bz}}{\sqrt{nabz}} = dt$ (6.), e moltiplicando, e dividendo $\sqrt{ac+bz}$, $\frac{acdz + bzdz}{\sqrt{nab \cdot \overline{acz+bz^2}}} =$

$\frac{1}{2}acdz$

Annotazione alle

$\frac{\frac{1}{2}acdz + bzdz}{\sqrt{2ab \cdot \overline{acz+bz^2}}} + \frac{\frac{1}{2}acdz}{\sqrt{2ab \cdot \overline{acz+bz^2}}} = dt$. L'integrale del termine $\frac{\frac{1}{2}acdz + bzdz}{\sqrt{2ab \cdot \overline{acz+bz^2}}}$ si eguaglia $\frac{\sqrt{acz+bz^2}}{\sqrt{2ab}}$, e quello del termine $\frac{\frac{1}{2}acdz}{\sqrt{2ab \cdot \overline{acz+bz^2}}}$ pareggia la quantità $\frac{ac}{2\sqrt{2ab^2}}\, l.\, \overline{1 \frac{+2}{\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}}-1}}$, dovendosi prendere i logaritmi nella logistica della suttangente $= 1$. Sarà pertanto $\frac{\sqrt{acz+bz^2}}{\sqrt{2ab}} + \frac{ac}{2\sqrt{2ab^2}}\, l\, 1 \frac{+2}{\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}}-1} = t$ (7.), formola, che dinota la proporzione fra lo spazio z scorso dall'acqua, che spiccia dal buco e, ed il tempo t impiegato a percorrerlo: il che ec.

Corollario I.

Mentre nel cominciamento del moto la grandezza bz è infinitamente minore di ac, la formola (7.) prende l'aspetto $\frac{\sqrt{acz}}{\sqrt{2ab}} + \frac{ac}{2\sqrt{2ab^2}}\, l\, \overline{1 + \frac{2\sqrt{bz}}{\sqrt{ac}}} = t$. Ma eguagliandosi $\frac{2\sqrt{bz}}{\sqrt{ac}}$ ad una grandezza menoma, abbiamo nella logistica della suttangente $= 1$ $l\, \overline{1 + \frac{2\sqrt{bz}}{\sqrt{ac}}} = \frac{2\sqrt{bz}}{\sqrt{ac}}$; dunque effettuati i necessarj calcoli $\sqrt{\frac{acz}{b}} = t$. Questa stessa formola si può agevolmente dedurre dall'equazione differenziale (6.) $\frac{dz\sqrt{ac+bz}}{\sqrt{2abz}} = dt$, cancellando nel numeratore il termine incomparabile bz, ed indi passando all'integrazione. Non lascio di avvertire, che il tempo $\sqrt{\frac{acz}{b}}$, oltre all'essere infinitesimo, si scopre ancora menomo relativamente al tempo $\sqrt{2z}$, in cui la massa cz stimolata dalla sua gravità avrebbe camminato per lo spazio z.

Corollario II.

Sia cresciuto lo spazio z sì fattamente, che fra le grandezze ac, bz passi una proporzione finita, e dall'attenta considerazione della formola (7.) $\frac{\sqrt{acz+bz^2}}{\sqrt{2ab}} + \frac{ac}{2\sqrt{2ab^2}}\, l\, 1 \frac{+2}{\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}}-1} = t$ ricaveremo esser infinitesimo il tempo, in cui l'acqua uscita dal vaso è pervenuta ad una velocità, la quale pel Corollario III. del Problema I. è finita, ma però sempre minore di $\sqrt{2a}$. E vaglia il vero, il primo dei due termini, ai quali si eguaglia il tempo t, cioè a dire $\frac{\sqrt{acz+bz^2}}{\sqrt{2ab}}$ è chiaramente minimo. Lo stesso parimente si verifica del secondo termine $\frac{ac}{2\sqrt{2ab^2}}\, l\, 1 \frac{+2}{\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}}-1}$; imperciocchè

$\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}}$

Schediasma XXXVI

$\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}}$ ecceda l'unità per una quantità finita, e perciò $\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}}-1$ si agguaglia ad una grandezza finita positiva; laonde $1+\frac{2}{\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}}-1}$ è maggiore dell'unità, e sta dentro i limiti del finito la differenza, con cui la supera. Quindi $l\,1+\frac{2}{\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}}-1}$ pareggia una quantità finita, e per conseguenza è infinitesima anche il termine $\frac{ac}{2\sqrt{2ab^2}}\,l\,1+\frac{2}{\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}}-1}$.

Corollario III.

Mentre la grandezza bz paragonata con ac è relativamente infinita, la formola (7.) si trasforma così: $\frac{z}{\sqrt{2a}}+\frac{ac}{2\sqrt{2ab^2}}\,l\frac{4.bz}{ac}=t$. Si scoprirà potersi trascurare il secondo termine, riflettendo, che se $l\frac{4.bz}{ac}$ fosse uguale a $\frac{4bz}{ac}$, allora il tutto secondo termine si agguaglierebbe a $\frac{2z}{\sqrt{2a}}$, e serberebbe col primo una determinata proporzione: ma $l\frac{4.bz}{ac}$ è infinitamente minore di $\frac{4.bz}{ac}$; dunque il secondo termine è inassegnabile in riguardo al primo, e può cancellarsi nell'equazione, onde si abbia $\frac{z}{\sqrt{2a}}=t$. Abbiamo veduto nel Corollario III. del Problema I., che quando bz è immensamente maggiore di ac, il che interviene, prima che lo spazio z giunga ad essere finito, la velocità del fluido scaturito dal vaso si agguaglia a $\sqrt{2a}$. Si cavi la conseguenza, che essendo $t=\frac{z}{\sqrt{2a}}$, esso fluido fa acquisto della velocità $\sqrt{2a}$ in tempo infinitesimo, e quindi egli è vero adequatamente, che l'acqua esce dal vaso con quella velocità, che un grave guadagna cadendo dall'altezza a. Si è parimente avvertito nel mentovato Corollario, che lo spazio z si corre con equabile velocità. Viene ciò confermato dalla nostra equazione $t=\frac{z}{\sqrt{2a}}$; imperciocchè la velocità è costante, quando i tempi stanno come gli spazj. Posto $z=2a$, scopresi $t=\sqrt{2a}$, ch'è quello stesso tempo speso da un grave a discendere dalla sublimità a, principiando dalla quiete. In fatti colla velocità, che un corpo acquista cadendo dall'altezza a, in pari tempo si passa un doppio spazio $z=2a$.

Scolio I.

Essendo $\frac{fdz}{2}=\frac{dmu^2}{2}$, o sia $fdz=dmu^2$, e scorrendosi

dalla

dalla massa $dm = c\,dz$ nel tempo dt lo spazio dz colla velocità u, di modo che si verifica essere $dz = u\,dt$, sostituito in cambio di dz un tal valore nella formola $f\,dz = dm\,u^2$, ci si presenterà $f\,dt = dm\,u$. Si verifica nel presente incontro, non solo la formola Leibniziana $\frac{f\,dz}{2} = \frac{dm\,u^2}{2}$, ma ancora la Cartesiana $f\,dt = dm\,u$; perchè la forza f agisca in qualità di costante per la metà di quello spazio dz, che nel tempo dt impiegato nell' azione viene scorso dalla massa dm colla velocità u acquistata in vigore dell' azione medesima. Quando la velocità u è divenuta equabile, ed eguale a $\sqrt{ra}$, è parimente costante la forza $f = rac$. Potremo adunque integrare l' equazione $f\,dt = dm\,u$, onde s' abbia $ft = mu$. Questa formola s' adatta perfettamente al sopra citato passo del Sig. Newton, Vis, qua tota aqua effluentis motus generari potest, aequalis est ponderi cilindricae columnae aquae, cujus basis est foramen $e7$ (Fig. 1.), et cujus altitudo est, aGI, vel aLK, mostrandoci a dire, che se si vuol trovare la giusta quantità di moto mu, di cui è fornita l' acqua $m = cz$ scaturita dal vaso, bisogna moltiplicare pel tempo t impiegato nell' acquistar esso moto la forza f, o sia il doppio peso della colonna ac, onde s' abbia $ft = mu$.

Scolio II.

Se per procedere con maggior esattezza, volesse taluno mettere a computo la forza viva dell' acqua contenuta nel gorgo, bisognerebbe, che prima determinasse la figura del gorgo, ed indi si facesse ad indagare la forza viva del fluido nell' atto, che passa pel gorgo.

Per istabilire la figura del gorgo, pongo in opera il seguente metodo. Suppongasi la forza f divenuta eguale a rac e sia IG (Fig. 1.) quello spazio, pel quale agendo una forza costante, che determineremo in progresso, sia capace di imprimere allo strato acqueo compreso fra i due circoli orizzontali SZT, KIL la velocità $u = \sqrt{ra}$. Ne segue che esercitando azione la detta forza per lo spazio IZ, è atta a cagionare nello strato KT la velocità v, di cui è fornita l' acqua prima di insinuarsi nel gorgo $SMe7NT$, e che di più essendo v minima relativamente

ad

Schediasma XXXVI.

ad u, lo spazio IZ è una parte infinitesima dello spazio IG. Ora da me si afferma, che quando tutta l'acqua KSMeZNTL è scaturita pel foro eZ, ne seguirà un effetto tale, come se tutto il nominato liquore fosse passato dalla velocità nulla alla velocità u. Si intenda diviso il gorgo in un numero infinito n di strati, ciascuno eguale di massa allo strato KT, e taglisi IX = n.IZ, e condotto per X il piano circolare orizzontale VXI, immaginiamoci distribuita l'acqua VKLY in un numero di strati, ognuno eguale allo strato KT. Chiaro fluisce la conseguenza, che le quantità di acqua VKLY, KSMeZNTL si uguagliano, e che nell'istante, in cui questa ha terminato di uscire dal vaso,[xx] è discesa quella ad occupare il sito in abbandono lasciato. Siano eZ, KL due dei nominati strati, e si chiami eZ ultimo strato inferiore, KL ultimo strato superiore. Premessa la supposizione, che la forza costante da determinarsi abbia facoltà di agire solamente dentro del gorgo, ossia per lo spazio IG, e non più, si osservi, che nel momento, che l'acqua KSMeZNTL ha finito di scaturire dal foro, la superficie ef dello strato eZ ha scorso dentro del gorgo lo spazio gG, e la superficie corrispondente kl dello strato KL ha scorso dentro del gorgo lo spazio Ig, e che la somma di questi spazj si uguaglia ad IG. Egli è dunque lo stesso, come se un solo strato fosse stato sollecitato per lo spazio IG. Non altrimenti eguale ad IG sarà l'aggregato degli spazj passati dentro del gorgo dalle coppie degli strati penultimo inferiore, penultimo superiore; antepenultimo inferiore, antepenultimo superiore, e così di seguito; di modo che quando è uscita tutta l'acqua, che dianzi occupava il gorgo, tanti strati, quanti compongono il gorgo stesso, sono stati stimolati da altrettante forze uguali per lo spazio IG, ed hanno fatto acquisto della velocità $u = \sqrt{2a}$, intervenendo lo stesso effetto, come se tutta l'acqua del gorgo avesse fatto transito dalla velocità nulla alla velocità u = [illegible]

Giacchè la forza costante, di cui si va in traccia, agendo per gli spazj IG, IZ, cagiona nello strato KT le velocità u, v, serberanno queste la ragione di $\sqrt{IG} : \sqrt{IZ}$: ma le dette velocità stanno come

come $b : c$; dunque ponendo $IG = g$, avremo $b : c :: \sqrt{g} : \sqrt{IZ}$, e conseguentemente $IZ = \frac{gc^2}{b^2}$. Eguagliandosi a b la sezione ST, agevolmente si scopre essere la massa dello strato $KT = \frac{gc^2}{b}$. Si chiami p la forza cercata, che operando per lo spazio $IG = g$, imprima nello strato $KT = \frac{gc^2}{b}$ la velocità $u = \sqrt{2a}$, e dalla nota formola $pg = \frac{gc^2}{b}a$ ricaveremo il valore della forza $p = \frac{ac^2}{b}$.

Sia lo strato KT giunto nel sito MN, e chiamata l'ascissa $IO = x$, e la sezione $MN = y$, saranno le velocità in MN, e Z come $\sqrt{x} : \sqrt{g}$: ma le stesse velocità si devono riferire nella ragione inversa delle sezioni $MN = y$, $eZ = c$; dunque $\sqrt{x} : \sqrt{g} : \frac{1}{y} : \frac{1}{c}$, analogia, che ci somministra l'equazione $y = \frac{c\sqrt{g}}{\sqrt{x}}$; da cui resta determinata la figura del gorgo.

Cerchiamo ora la quantità della massa fluida, della quale il gorgo è riempiuto. L'elemento della massa contenuta nella porzione di gorgo $SMNT$ è $ydx = \frac{c\,dx\sqrt{g}}{\sqrt{x}}$. Quindi integrando avremo la massa $SMNT = \int ydx = 2c\sqrt{gx} - A$. Si determina la costante A riflettendo, che quando $x = \frac{gc^2}{b^2} = IZ$, è $SMNT = \int ydx = 0$. Questa condizione ci dà $A = \frac{2gc^2}{b}$, e conseguentemente $SMNT = 2c\sqrt{gx} - \frac{2gc^2}{b}$: ma la massa $KSTL = \frac{gc^2}{b}$; dunque $KSMNTL = 2c\sqrt{gx} - \frac{gc^2}{b}$, e quando $x = g = IG$, sarà l'intera massa contenuta nel gorgo $KSMeZNTL = 2cg - \frac{gc^2}{b}$, ossia adequatamente $= 2cg$.

S'è da me fatta la riflessione, che mentre è spicciata pel foro tutta l'acqua $2cg$, che capisce nel gorgo, è seguito lo stesso effetto, come se tutti gli strati componenti il gorgo, ognuno stimolato per lo spazio g dalla forza $\frac{ac^2}{b}$, avessero fatto acquisto della velocità $u = \sqrt{2a}$. Ho scoperta la somma dei predetti strati $= 2cg$. L'aggregato delle forze degli strati medesimi si rende manifesto coll'avvertire, che se uno strato, la cui massa $\frac{gc^2}{b}$, è animato dalla forza $\frac{ac^2}{b}$, la somma di tutti gli strati, cioè a dire la massa $2cg$, verrà sollecitata dalla forza $2ac$, la quale agendo per lo spazio g cagionerà la forza viva $2cg \cdot \frac{u^2}{2} = 2cga$, ed imprimerà nella massa $2cg$ la velocità $u = \sqrt{2a}$.

Deducendosi dalla stabilita figura del gorgo quella stessa forza $f = 2ac$, che nel Problema II. indipendentemente dalla

figura

figura stessa abbiamo determinata con altro metodo, chiaramente si scopre, che la figura assegnata al gorgo si è quella, che viene effettuata dalla Natura.

Dalla formola $fg = 2cg \cdot \frac{u^2}{2}$ si ricava l'altra $f \cdot \frac{g}{n} = \frac{2gc}{n} \cdot \frac{u^2}{2}$, la quale ha luogo anche quando la velocità u non è divenuta equabile; dovendosi considerare come costante la forza f qualunque agisca per uno spazio minimo $= \frac{g}{n}$. In virtù dell'azione di essa forza adequatamente costante dee passar l'acqua $\frac{2gc}{n}$ dalla velocità nulla alla velocità u colla legge di un grave cadente, il che necessariamente richiede la figura del gorgo da me scoperta. Si osservi, che eguagliandosi f ad una funzione della incognita z, il suo valor è costante, sino a tanto che non si varia la grandezza di z: ma uscendo pel foro le infinitesime quantità di acqua $\frac{2gc}{n}$, la z persiste adequatamente invariabile; dunque mentr'esce il fluido $\frac{2gc}{n}$, la forza f si può considerare come costante. A norma di ciò si adempie la formola $\frac{f}{n} \cdot g = \frac{2gc}{n} \cdot \frac{u^2}{2}$, e segue lo stesso effetto, come se la forza costante $\frac{f}{n}$ stimolasse la massa, che spiccia nuovamente dal foro, per lo spazio g, e generasse in essa massa $\frac{2gc}{n}$ la forza viva $\frac{2gc}{n} \cdot \frac{u^2}{2}$. Le cose dette di sopra ci fanno toccar con mano, che se conformemente alla natura di una forza costante le velocità hanno da stare come le radici degli spazj, a cui si applica la forza stessa, il gorgo dee avere quella figura, che abbiamo determinata.

Scolio III.

La forza viva dell'acqua contenuta nel gorgo egualmente si deduce dalla figura del gorgo medesimo. La forza viva dello strato $kT = \frac{gc^2}{b}$, il quale si muove colla velocità $v = \frac{cg}{ba}$, si eguaglia a $\frac{gc^4}{b^3} \cdot \frac{u^2}{2}$. Nel sito MN la velocità dello strato ydx pareggia la quantità $\frac{cu}{y}$, e quindi ne risulta la forza viva dello strato suddetto $= ydx \cdot \frac{c^2u^2}{2y^2} = \frac{c^2dx}{y} \cdot \frac{u^2}{2}$. Si sostituisca in vece di y il suo valore suggeritoci dall'equazione $y = \frac{c\sqrt{g}}{\sqrt{x}}$, e resta determinata la figura del gorgo, e ci si presenterà la detta forza viva $= \frac{cx^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{g}} \cdot \frac{u^2}{2}$. Passando all'integrazione, scopriremo la forza viva dell'acqua $KSMNTL = \int \frac{cx^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{g}} \cdot \frac{u^2}{2} = \frac{2}{3} \frac{cx^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{u^2}{2} + B$

Si

Annotazione allo

Si noti, che la velocità u va considerata come costante, cercandosi la forza viva dell'acqua contenuta nel gorgo, mentre la velocità u nel sito $e7$ in qual tal momento è di determinata misura. Ritrovasi il valore della costante B riflettendo, che quando $x = \frac{gc^2}{b^2} = IZ$, la forza viva dello strato KT si agguaglia a $\frac{gc^4}{b^3}\cdot\frac{u^2}{2}$. Averemo per tanto in della circostanza $\frac{2}{3}\frac{cg^{\frac{3}{2}}c^3}{g^{\frac{1}{2}}b^3}\cdot\frac{u^2}{2} + B = \frac{gc^4}{b^3}\cdot\frac{u^2}{2}$; e per conseguenza $B = \frac{1}{3}\frac{gc^4}{b^3}\cdot\frac{u^2}{2}$. Sarà dunque la forza viva dell'acqua $KSMNTL = \int \frac{cx^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{g}}\cdot\frac{u^2}{2} = \frac{2}{3}\frac{cx^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g}} + \frac{1}{3}\frac{gc^4}{b^3}\cdot\frac{u^2}{2}$; e posta $x = g$, scopriremo la forza viva dell'acqua, che capisce nel gorgo, $= \frac{2}{3}cg + \frac{1}{3}\frac{gc^4}{b^3}\cdot\frac{u^2}{2}$, cioè uguale adequatamente a $\frac{2}{3}cg\cdot\frac{u^2}{2}$.

Scolio IV.

Prima di indagare la velocità, colla quale l'acqua scaturisce pel foro $e7$, mettendo a computo la forza viva dell'acqua contenuta nel gorgo, egli è di uopo dimostrare, che quantunque la Natura formi nel fondo del vaso il gorgo $KSMe7NTL$, ciò non ostante quando la superficie superiore dell'acqua è discesa per lo spazio minimo $HQ = s$, la gravità dell'acqua infusa entro il vaso ha esercitata l'azione $abs = acz$. Egli è chiaro, che l'azione dell'acqua AL si agguaglia ad $abs - gbs$. Resta dunque da provarsi, che l'azione della gravità del fluido, che riempie il gorgo, pareggia la quantità gbs. L'acqua $AA = bs$ uscita dal vaso si conforma nel sito MN in un volume, la cui altezza $\frac{bs}{y}$; e quindi scaturita che sia pel foro l'acqua suddetta, lo strato ydx è disceso per lo spazio $\frac{bs}{y}$, e la sua gravità ha effettuata l'azione $= ydx\cdot\frac{bs}{y} = dx\cdot bs$, la quale si scopre uguale alla massa liquida bs scappata fuori dal vaso moltiplicata nell'altezza dx dello strato ydx. Verificandosi ciò delle azioni di tutti gli strati, che formano il gorgo, rendesi manifesto, che la somma delle prodotte azioni si agguaglia alla grandezza bs moltiplicata nella somma delle altezze di essi strati, ch'è quanto a dire nell'altezza g del gorgo, onde si abbia l'azione della gravità dell'acqua occupante il gorgo $= gbs$, e conseguentemente l'azione dell'acqua, tutta

contenuta

contenuta nel vaso = abs = acz.

Corollario.

Qualunque sia la figura di un vaso KSMQJNT li ripieno di fluido, l'azione della sua gravità è sempre uguale al prodotto gbs, e serba la ragione composta dell'altezza verticale g del liquore, della sua superficie superiore b, e dello spazietto parimente verticale s, pel quale la mentovata superficie è calata abbasso. Questo curioso teorema rende facilissima la dimostrazione, che infusa dell'acqua in due vasi comunicanti di qualsivoglia figura, si formerà l'equilibrio, quando le due superficie superiori dell'acqua nell'uno, e nell'altro vaso si adatteranno allo stesso piano parallelo all'orizzonte. Si esprimano per b, B le nominate superficie, che stanno fra loro a livello, e se pur è possibile, la superficie b discenda per lo spaziette s, onde nel primo vaso segue l'azione positiva gbs. Egli è chiaro, che da un tal vaso è uscita l'acqua bs, e ch'essendosi alzato il livello del liquore nel vaso secondo per una quantità di acqua = bs, ha preso questa la forma di un volume, la cui altezza $= \frac{bs}{B}$. A norma di ciò la gravità dell'acqua contenuta nel secondo vaso è stata obbligata ad esercitare l'azione negativa $gB \cdot \frac{bs}{B} = bs$. Essendo pertanto eguali, e contrarie le due azioni, che succedono ne' due vasi comunicanti, l'una impedisce l'altra, ne segue alcun moto; perchè quanta forza viva genererebbe l'azione positiva, altrettanta n'estinguerebbe l'azion eguale negativa.

Scolio V.

Ora riesce agevolissimo il determinare la velocità, colla quale l'acqua zampilla fuori dal vaso, senza trascurare la forza viva dell'acqua, che capisce nel gorgo. Avremo pertanto $abs = acz = \overline{ab - bs - bg} \cdot \frac{v^2}{2} + \overline{\frac{2cg}{3} + cz} \cdot \frac{u^2}{2}$, e sostituendo in vece di v^2 il suo valore $\frac{c^2u^2}{b^2}$, ed effettuate le dovute operazioni

$$\frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac - cs - gc + \frac{2bg}{3} + bz}} = u,$$ e cancellati i termini cs, gc incompatibili, l'uno con ac, l'altro con $\frac{2}{3}bg$, $\frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac + \frac{2}{3}bg + bz}} = u$.

Corollario I.

Se la quantità bg è infinitamente minore di ac si manifesta

nella

tutte le conseguenze contenute nei Corollarj del Problema I.

Corollario II.

Suppongasi, che bg corrisponda ad ac in proporzione finita, e nel principio del moto, quando bz è minima in paragone di ac, ci si presenterà $u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac+\frac{2}{3}bg}}$, la quale velocità sta a quella, che abbiamo determinata nel Corollario I. del Problema I., come $\sqrt{ac} : \sqrt{ac+\frac{2}{3}bg}$.

Se sendo cresciuto lo spazio z, le grandezze ac, bg, bz avranno fra loro una relazione finita, si scoprirà altresì finita la velocità $u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac+\frac{2}{3}bg+bz}}$, ma però minore di quella, che sta espressa nel Corollario II. del Problema I. nella proporzione di $\sqrt{ac+bz} : \sqrt{ac+\frac{2}{3}bg+bz}$.

Finalmente quando bz sarà infinita relativamente ad ac, e per conseguenza ancora relativamente a bg, il che può verificarsi mentre bz è minima, troveremo, come nel Corollario III. del citato Problema, $u = \sqrt{2a}$.

Corollario III.

Sia bg minima, e nello stesso tempo infinita in confronto di ac, e sul cominciare del movimento, quando bz può trascurarsi rispettivamente ad ac, sarà $u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{\frac{2}{3}bg}} = \sqrt{\frac{3az}{g}}$, cioè a dire infinitamente minore della celerità $\frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac}}$, che supponendo potersi negligere la forza viva dell'acqua contenuta nel gorgo, abbiamo scoperta nel Corollario I. del Problema I. La velocità per altro del presente Corollario è maggiore di quella $= \sqrt{2z}$, che acquisterebbe la massa cz sollecitata per lo spazio z dalla sua gravità.

Seguiterà altresì ad esser minima la velocità $u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{\frac{2}{3}bg}}$, quando bz serba relazione finita con ac, e perchè divenga finita essa velocità, bisognerà, che bz riguardi bg con proporzione finita, onde si abbia $u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{\frac{2}{3}bg+bz}}$.

Divenuta poi la quantità bz infinita respettivamente a bg, il che potrà avvenire stando ancora dentro i confini delle grandezze

minime

minima lo spazio z, ne risulterà, come nel Corollario III. del Problema I., $u = \sqrt{ra}$.

Corollario IV.

Fingasi finita l'altezza g del gorgo, e sinattantochè sarà infinitesimo lo spazio z, avremo $u = \frac{\sqrt{rabz}}{\sqrt{\frac{2}{3}bg}}$, e l'acqua uscita cz si muoverà con minima velocità.

Acciocchè la celerità del liquore giunga ad un valore finito, egli è di uopo, che sia parimente finito lo spazio z, ed in tal circostanza ci accorgeremo essere $u = \frac{\sqrt{rabz}}{\sqrt{\frac{4}{3}bg + bz}}$ sempre minore di $\sqrt{ra}$.

Solamente quando fosse $z = \infty$, avrebbe l'acqua scaturita cz fatto acquisto dopo un tempo infinito della velocità equabile $= \sqrt{ra}$.

Scolio VI.

Osservandosi, che l'acqua, che zampilla fuori di un vaso per un foro picciolo, perviene così presto all'equabile velocità, che il senso non se ne accorge, egli è evidente, che la Natura determina minima l'altezza g del gorgo, ricavandosi dai sovraposti Corollarj, che l'acqua guadagna la velocità equabile $\sqrt{ra}$, dopo aver corso uno spazio inassegnabile in tempo infinitesimo, purchè non esca dai limiti della quantità immensamente picciola l'altezza g del gorgo suddetto

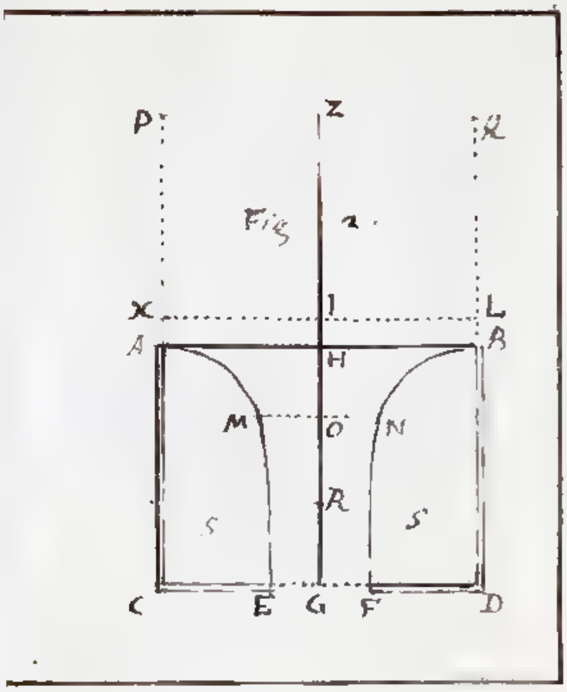
Scolio VII.

Siccome nell'indagare le leggi delle vibrazioni delle corde sonore si suppone minima matematica la forza, che le stimola al moto, e le conseguenze geometriche, che si deducono, si adempiono poi fisicamente, quando alla forza infinitesima si sostituisca la forza minima fisica; non altrimenti le proprietà, che si sono scoperte, fingendo infinitamente piccioli il foro aperto nel fondo del vaso, e l'altezza del gorgo, si verificheranno fisicamente, se il foro c sarà assai ristretto relativamente alla capacità del vaso, e l'altezza g del gorgo assai picciola.

Collo stesso metodo delle azioni si può trattare il caso, quando il foro c, e la base b del vaso cilindrico si riguardano

ini

in proporzione finita: ma con ciò si sorpasserebbero quei confini, dai quali la presente Annotazione vien circoscritta.


Z
P
K
Fig 2.
X
I
L
A
B
H
M
O
N
R
S
S
C
E
G
F
D

Soluzione della difficoltà proposta dal Sig.r Riv.mo
P.D. Girolamo Saladini monaco Celestino intorno ad una
proposizione contenuta nell'Opera delle Corde, ovvero
Fibre elastiche del Signor C. Giordano Riccati Schediasma
I. Num. XX. cioè che un peso minore della rigidità
naturale d'una corda la rompe.

E' contenuta nella N. R. Calogeriana Tomo XIX
alla pag. 287. In Venezia MDCCLXX. Per Simone
Occhi in 12.mo

Soluzione della Difficoltà proposta dal Dottissimo P. D. Girolamo Saladini Monaco Celestino intorno ad una proposizione contenuta nell'Opera Della Corda ovvero Fibra Elastica del Sig. Co. Giordano Riccati Schediasma I. Num. XX. cioè che un peso minore della rigidità naturale di una corda la rompa.

E' contenuta nella N. R. Calogeriana Tomo XIX. alla pagina 87. In Venezia MDCCLXX. Per Simone Occhi. In 12mo

I. Nella mia Opera Della Corde, ovvero Fibra Elastica al numero XX. dello Schediasma I. asserisco fondato sulle mie teoriche, e sugli esperimenti di M. Sauveur, che in una corda sono due cose diverse la rigidità, che ripugna alle distensioni, e la tenacità, che ne impedisce il rompimento sino ad un certo segno. La corda da me usata nella sperienza si sarebbe rotta applicandole il peso di libre 12 + grani 132 $\frac{12}{13}$, e nell'atto di rompersi sarebbe stata fornita della rigidità naturale equivalente a libre 1124 $\frac{1}{2}$ a un di presso; grandezza incomparabilmente maggiore della tenacità di essa corda alquanto più picciola del peso di libre 12, e grani 132 $\frac{12}{13}$, che l'ha superata:

Ora il chiarissimo P. D. Girolamo Saladini la discorre acutamente così. La rigidità naturale non può esser altro, che una spezie di resistenza, la quale ad esser equilibrata esige, che le si applichi un determinato peso, prima che la corda ad allungarsi incominci: ma egli è impossibile, che si rompa, se allungata non sia; dunque perchè si rompa, converrà aggiungere un altro peso a quello, ch'equilibra la rigidità naturale. E come dunque può stare, che il peso rompente la corda sia minore della rigidità naturale, se dee esser uguale a quello, ch'equilibra la detta rigidità coll'aggiunta di un altro?

II. La difficoltà è degna di chi la propone, e merita di essere maturamente discussa. Per iscoprirne lo scioglimento, egli è d'uopo considerare, che la corda non istirata conserva la sua naturale lunghezza, e ad accorciarsi, e ad allungarsi egualmente ripugna. Si cavi adunque la conseguenza, che la rigidità naturale

ha

ha da esser equilibrata da un'altra forza, e che un tale bilanciamento impedisca, che la corda muti figura; quando non ci sia una forza estrinseca, che lo frastorni. Venendo gli equilibrj turbati da ogni forza quantunque piccola; ne segue che attaccato qualsivoglia peso alla corda, deve rompere l'equilibrio, ed allungare la corda stessa. Che se qualcuno opponesse, che in sì fatta guisa la rigidità naturale si pone, e si toglie nel tempo medesimo, ed è come se non ci fosse; risponderei, che siccome al crescere della rigidità artificiale, quantunque bilanciata dal peso P, cala la distensione prodotta dal peso aggiunto dp; così quanto è più grande la rigidità naturale, benchè equilibrata, tanto riesce più piccolo l'allungamento operato dal peso dp; e quindi non si avvera, che sia lo stesso, come se non esistesse la naturale rigidità equilibrata.

III. Nè si può sostenere, che la rigidità naturale sia soltanto una forza passiva; nella quale ipotesi, per dir il vero, la corda non si allungherebbe, se non applicandole un peso maggiore di essa rigidità. Imperciocchè abbiasi la corda AB, a cui si appenda il peso P, che formi equilibrio colla rigidità naturale, e giusto la supposizione, che si combatte, non produca distensione veruna. Si aggiunga poscia il peso dp, il quale, allungando la corda, discenda congiuntamente col peso P accelerandosi, e ritardandosi per lo spazio minimo BC, e pervenga alla quiete nel punto C. Normale ad AC conduco la linea BQ uguale al peso P, o sia alla rigidità naturale, e tagliata $BD = dp$, compio i due rettangoli BH, BT. Segno di poi $CG = 2BD = 2dp$, e tiro la diagonale BG. Essendo minimo il peso aggiunto dp, le ordinate del triangolo BCG dinotano le artificiali rigidità crescenti della corda, secondochè si va maggiormente stendendo, e l'aja dello stesso triangolo pareggia la reazione delle prodotte rigidità: ma per la costruzione il mentovato triangolo si uguaglia al rettangolo BT, che esprime l'azione del peso $BD = dp$, e l'azione BH del peso $BQ = P$ è compensata da una pari reazione della rigidità naturale; dunque uguagliandosi l'azione totale alla totale reazione, i pesi $P + dp$ si sono ridotti in quiete nel sito C, dove la rigidità artificiale

della

Dal P. D. Girolamo Saladini.

dalla corda è doppia del peso aggiunto dp. Ora io dico, che posta la rigidità naturale una forza soltanto passiva, e considerando come forza passiva ed attiva la rigidità artifiziale, i pesi P+dp si fermerebbero nel sito C, nè seguirebbe reciprocazione; imperocchè la corda sarebbe molle, e non elastica, come per altro supponesi. E vaglia il vero i pesi P+dp sono spinti all'ingiù dalla forza P+dp infinitamente maggiore di quella 2dp uguale alla rigidità artifiziale, che li tira all'insù, e per conseguenza non è loro permesso di ascendere.

IV. Non così succede supponendo la rigidità naturale una forza attiva equilibrata da un'altra forza esistente nella medesima corda. In tale ipotesi non c'è bisogno del peso P, che la equilibri; laonde applicato il solo peso dp, e giunto esso nel punto C allo stato di quiete, sarà tirato abbasso dalla forza dp, e spinto in alto dalla forza doppia 2dp, e perciò salirà sino al punto B, indi tornerà a discendere, ed una tale vicenda continuerebbe all'infinito, se non ci fossero resistenza. E perchè si danno effettivamente le notate oscillazioni, e reciprocazioni; resta ad evidenza provato, che la rigidità naturale è una forza attiva, ed equilibrata, e si conferma quello, che ho detto sul bel principio, che intanto la corda non istirata conserva la sua figura, in quantochè la rigidità naturale è una forza attiva, che da un'altra forza inviscerata nella corda stessa è tenuta in bilanciamento. Le due rigidità naturale, ed artifiziale appartengono alla stessa specie di forza, ed anzi la seconda non è che un accrescimento della prima. La naturale sta in equilibrio con una forza oppiattata nella corda, l'artifiziale col peso e forza tendente. Nasce principalmente la rigidità naturale dalla costipazione cagionata dal passar che fa la corda innumerabili volte con sommo sforzo per trafile sempre più ristrette: e la forza, che la equilibra, trae la sua origine dall'intralciamento delle particelle metalliche, che impedisce alla corda il dilatarsi, dopochè è uscita dalla trafila. Gittata una corda nel fuoco, la violenza di questo elemento la rarefà, le fa perdere la più risentita rigidità, e con essa la sonorità per lo meno in gran parte. Conchiudasi, che variando una

una corda allungata da qualsivoglia benchè minimo peso, si schiva l'assurdo, che un peso minore della rigidità naturale la rompa senz'allungarla.

V. Finisco con alcune riflessioni importanti intorno alla tenacità delle corde di metallo. Quella tenacità, che unicamente si manifesta negli esperimenti, e che col mezzo della tensione si vince, è non solo di gran lunga minore della totale rigidità, ma ancora della rigidità naturale. Al contrario la predetta tenacità è sempre più grande della rigidità artificiale, quando la corda si conserva intera; ed allora soltanto queste due forze si eguagliano, quando la corda è infinitamente prossima a rompersi. Ma una tale tenacità si eguaglia poi alla totale tenacità della corda? Io penso certamente che no. Bisogna aggiungervi una porzione molto maggiore uguale alla rigidità naturale corrispondente al peso, che accresciuto di un minimo rompe la corda; onde l'intera tenacità pareggia la somma della rigidità naturale, ed artificiale, di cui è fornita la corda nell'atto di rompersi. La tenacità uguale alla rigidità naturale è tenuta in equilibrio dalla tante volte nominata forza esistente nella corda; è perciò equilibrata col mezzo della tensione la rimanente tenacità, basta l'accrescimento di un peso minimo per frangere la corda. Sintantochè la corda non è vicina a spezzarsi, l'intera tenacità è maggiore dell'intera rigidità; e solo quando la rottura è imminente, le mentovate forze giungono all'uguaglianza.

Credo, se pure non prendo errore, che sia quanto basta spianata la proposta difficoltà; ed io ringrazio divotamente lo stimatissimo Padre D. Girolamo Saladini, che mi abbia dato occasione di discorrere un punto, che veramente meritava di essere dilucidato.

Riflessioni del Sig. Co. Giordano Riccati sopra l' Annotazione allo Schediasma XXXVI. contenute nel Tomo III. delle Opere del Sig. Co. Jacopo Riccati pag. 425. In Lucca MDCCLXIV. Appresso Jacopo Giusti. In 4.to Sono inserite queste Riflessioni nella N.R. Calogeriana Tomo XIX. alla pag. 295. In Venezia MDCCLXX. Per Simone Occhi. In 12.mo

del Sig.r Co. Giordano Riccati
Riflessioni, sopra l'Annotazione
allo Schediasma XXXVI. contenuto
nel Tomo III. delle Opere del Sig.r Co.
Jacopo Riccati.

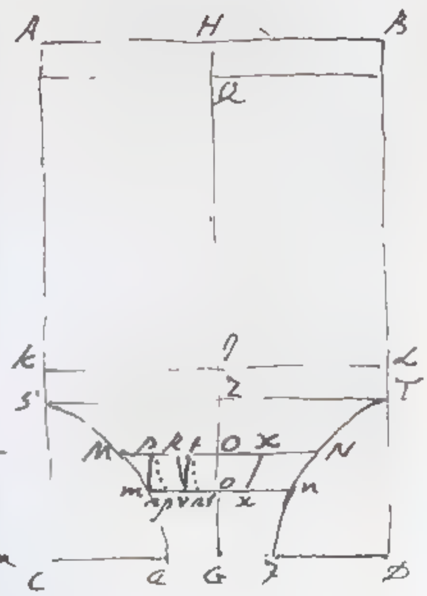


Fig. 1.

Nell'Annotazione allo Schediasma XXXVI. contenuto nel Tomo III. delle Opere del Co. Jacopo Riccati mio Padre non ho messo in conto il moto orizzontale, che dee concepir l'acqua, mentre per uscire dal foro QZ (fig. 1.) aperto nel mezzo del fondo del vaso cilindrico AD va discendendo nel gorgo SMQZNT, ed accomodandosi a sezioni circolari sempre più ristrette ST, MN, QZ. Egli è certo, che quando la particola S è giunta in Q, ha scorso lo spazio orizzontale SZ – QG: ora vediamo cosa succeda, ponendo a computo la velocità orizzontale.

Siano come nell'Annotazione $HG = a$, $IG = z$, $IO = x$, $Oo = dx$, e la sezione circolare $AB = ST = b$, $QZ = c$, $MN = y$, $mn = y - dy$. Esponga n la proporzione della circonferenza circolare al diametro, ed agevolmente si scoprirà essere il raggio $MO = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{n}}$, e la sua differenza negativa $Mp = \frac{-dy}{2\sqrt{ny}}$. Sia in oltre $= q$ l'aja circolare, il cui diametro RX, e $q - dq$ quella del diametro vx. Avremo conseguentemente i raggi $OR = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{n}}$, $ov = \frac{\sqrt{q-dq}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{n}} - \frac{dq}{2\sqrt{nq}}$, e quindi tirata vt parallela ad oO, ne risulta $Rt = \frac{-dq}{2\sqrt{nq}}$.

Quando lo strato Mn discende in tal guisa, che la sezione MN passi nel sito mn, egli è fuori di dubbio, che la quantità d'acqua

Mmpp

Mmapp = $-dydx$ ha scorso lo spazio orizzontale Mp = $\frac{-dy}{2\sqrt{uy}}$, e la quantità d'acqua kxntt = $-dqdx$ lo spazio orizzontale $\frac{-dq}{2\sqrt{uq}}$. Si stabiliscano i detti spazj proporzionali alle potenza positive indicate dall'esponente k dei raggi MO = $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{u}}$, kO = $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{u}}$ onde la velocità orizzontale divenga = 0 nel sito Oo. Avremo pertanto

$\left(\frac{y}{u}\right)^{\frac{k}{2}} : \frac{-dy}{2\sqrt{uy}} :: \left(\frac{q}{u}\right)^{\frac{k}{2}} : \frac{-dq}{2\sqrt{uq}}$, analogia,

da cui si deduca $\frac{dy}{y^{\frac{k+1}{2}}} = \frac{dq}{q^{\frac{k+1}{2}}}$, o sia

$\frac{q^{\frac{k+1}{2}}dy}{y^{\frac{k+1}{2}}} = dq$ (1)

Abbia l'acqua in QZ acquistata la velocità verticale u, e dovendo stare le velocità verticali inversamente come le sezioni circolari QZ, MN, avremo la velocità in MN = $\frac{cu}{y}$. E giacchè la velocità verticale, ed orizzontale debbono riferirsi nella ragione degli spazietti minimi kt = dx, kt = $\frac{-dq}{2\sqrt{uq}}$ scorsi nel tempo stesso, col mezzo dell'analogia

$dx : \frac{-dq}{2\sqrt{uq}} :: \frac{cu}{y} : \frac{-cudq}{2\sqrt{uq}\cdot ydx}$, troveremo la velocità orizzontale $\frac{cu\cdot -dq}{2y\sqrt{uq}\cdot dx}$ della quantità d'acqua $-dxdq$ nello strato Mm. Il perchè sarà la sua forza viva per la direzione orizzontale $= -\frac{c^2dq^3}{4uy^2dxq}\cdot\frac{u^2}{2}$

Nel numeratore in cambio di dq^2 si

sostituisca

sostituisca il suo valore $= \frac{g^{k+1} \cdot dy^2}{k+1 \; y}$ somministrato dalla formola (1); e la mentovata forza viva prenderà il seguente aspetto $- \frac{c^2 dy^2 g^k dg}{4 n y^{k+3} dx} \cdot \frac{u^2}{n}$. Passo all'integrazione nella ipotesi di $\frac{c^2 dy^2}{4 n y^{k+3}} \cdot \frac{u^2}{n}$ costante, cangiando prima il segno negativo in affermativo; per la ragione che la g cresce, mentre si procede da O verso M, e mi si presenta la forza viva per la direzione orizzontale dello strato $kx = \frac{c^2 g^{k+1} dy^2}{k+1 \cdot 4 n y^{k+3} dx} \cdot \frac{u^2}{n}$, e quindi ne raccolgo, quando $g = y$, la forza viva dello strato $Mn = \frac{c^2 dy^2}{k+1 \cdot 4 n y^2 dx} \cdot \frac{u^2}{n}$.

La figura del gorgo determinata nell'Annotazione ci dà l'equazione $y = \frac{c\sqrt{g}}{\sqrt{x}}$, da cui si deduce $dy = \frac{-c\,dx\sqrt{g}}{2x\sqrt{x}}$. Effettuata la sostituzioni scopriremo la nostra forza viva $= \frac{c^2 dx}{k+1 \cdot 16 n x^2} \cdot \frac{u^2}{n}$. L'integrazione di questa formola somministra la forza viva orizzontale dell'acqua SMNT $= A - \frac{c^2}{k+1 \cdot 16 n x} \cdot \frac{u^2}{n}$; ma quando $x = OZ$, la detta forza viva $= 0$, e la citata Annotazione c'insegna essere $OZ = \frac{gc^2}{b^2}$; dunque $A - \frac{b^2}{k+1 \cdot 16 n g} \cdot \frac{u^2}{n} = 0$, e perciò $A = \frac{b^2}{k+1 \cdot 16 n g} \cdot \frac{u^2}{n}$. Quindi la forza viva orizzontale dell'acqua SMNT $= \overline{\frac{b^2}{k+1 \cdot 16 n g} - \frac{c^2}{k+1 \cdot 16 n x}} \cdot \frac{u^2}{n}$, e mentre $x = OG = g$, la forza viva

orizzontale

orizzontale dell'acqua contenuta nel gorgo SMQZNT $= \frac{\overline{b^2-c^2}}{\overline{k+1}\cdot 16ng}\cdot\frac{u^2}{2}$.

Nell'Annotazione ho stabilita la forza viva verticale dell'acqua SMQZNT $= \frac{2}{3}cg\cdot\frac{\overline{b^3-c^3}}{b^3}\cdot\frac{u^2}{2}$. Si inferisca essere la totale forza viva dell'acqua suddetta $= \frac{\overline{b^2-c^2}}{\overline{k+1}\cdot 16ng}\cdot\frac{u^2}{2}+\frac{2}{3}cg\cdot\frac{\overline{b^3-c^3}}{b^3}\cdot\frac{u^2}{2}$.

Quanto una minor parte dell'azione della gravità dell'acqua contenuta nel vaso s'impiegherà ad imprimere forza viva all'acqua del gorgo, con tanto maggiore velocità l'acqua spiccierà fuori pel foro QZ. Egli è di uopo dunque indagare l'altezza DG = g del gorgo, a cui corrisponde la minima forza viva dell'acqua in esso compresa. Si otterrà ciò differenziando la formola

$$\frac{\overline{b^2-c^2}}{\overline{k+1}\cdot 16ng}\cdot\frac{u^2}{2}+\frac{2}{3}cg\cdot\frac{\overline{b^3-c^3}}{b^3}\cdot\frac{u^2}{2}$$

nella supposizione di g variabile, onde si abbia

$$\frac{\overline{b^2-c^2}}{\overline{k+1}\cdot 16n}\cdot\frac{u^2}{2}\cdot\frac{-dg}{g^2}+\frac{2}{3}c\cdot\frac{\overline{b^3-c^3}}{b^3}\cdot\frac{u^2}{2}\cdot dg = 0,$$

ed indi se ne raccolga $g = \frac{\sqrt{3b^3\cdot\overline{b^2-c^2}}}{\sqrt{\overline{k+1}\cdot 32nc\cdot\overline{b^3-c^3}}}$.

Dedurrebbesi lo stesso valore di g dal supporre uguali le due forze vive orizzontale, e verticale, onde l'intera forza viva dell'acqua nel gorgo SMQZNT si agguagli a $\frac{\overline{b^2-c^2}}{\overline{k+1}\cdot 4ng}\cdot\frac{u^2}{2} = \frac{4}{3}cg\cdot\frac{\overline{b^3-c^3}}{b^3}\cdot\frac{u^2}{2}$.

Sostituito lo scoperto valore di g, la forza

viva

viva dell'acqua nel gorgo si trasforma così $\frac{\sqrt{c.\overline{b^2-c^2}.\overline{b^3-c^3}}.\frac{u^2}{2}}{\sqrt{k+1}.6mb^3}$.

Se si faccia $c=b$, il gorgo svanisca, e perciò dovendo esser minima la forza viva dell'acqua, che scorre per esso, ha da essere $g=0$. Per evitare gli equivoci, stabilisco $b-p=c$, e suppongo p quantità infinitesima. Poichè il computo mi dà $b^2-c^2=abp$; $b^3-c^3=3b^2p$, poste in opera queste sostituzioni nella formola esprimente l'altezza del gorgo, trovo $g=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{k+1}.16m}$: ma questo valore dee annullarsi almeno adequatamente; dunque $k+1=\infty$.

Or ecco dimostrato essere infinitamente piccola la forza viva dell'acqua nel gorgo; laonde io la potea nell'Annotazione tralasciar tutta intera, e ne ho per conseguenza lecitamente tralasciata la metà, a cui si agguaglia la forza viva orizzontale. Si avverta, che l'altezza $g=\frac{\sqrt{3b^3.\overline{b^2-c^2}}}{\sqrt{k+1}\,2mc.\overline{b^3-c^3}}$ è altresì infinitesima.

Sia detto tutto ciò in rigore geometrico, e prescindendo dalle resistenze. Facendo ~~[illegible]~~ ricorso alla fisica, sono finite ~~[illegible]~~ e l'altezza del gorgo, e la mentovata forza viva, che da essa altezza dipende, e per conseguenza nè tutta intera, nè la metà si dee tralasciare nel computo.

Il Cavalier Newton (a) ha osservato, che essendo il diametro del foro $\frac{5}{8}=\frac{25}{40}$ di un dito, il

(a) Philosophia Naturalis Princ. Math. Lib. II. Prop. XXXVI. Cas. 1

il diametro più ristretto della vena dive-
niva di $\frac{21}{40}$ alla distanza di $\frac{20}{40}$ dal foro.
Quindi in riguardo alle particole esteriori
della vena la velocità orizzontale alla verti-
cale si riferiva in ragione di 2 : 20, ov-
vero di 1 : 10. La celerità orizzontale
delle particole interiori dovea essere sem-
pre minore, secondo che all' asse della ve-
na erano maggiormente vicine.

Non è difficile dalle premesse osser-
vazioni raccogliere l' altezza $IG = g$ del
gorgo nel caso del Signor Newton. Abbia-
mo stabilito essere $Mp : pm ::$
$$-\frac{dy}{2\sqrt{ny}} = \frac{c^{\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{4}}dx}{4n^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{4}}} : dx :: c^{\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{4}} : 4n^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{4}}.$$
Nel sito eZ $x = g$, e perciò
$$Mp : pm :: \sqrt{c} : 4g\sqrt{n} :: \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{n}} : 4g :$$
ma $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{n}} = eG = \frac{12\frac{1}{2}}{40}$; dunque
$$Mp : pm :: \frac{12\frac{1}{2}}{40} : 4g.$$ E conciossiachè
giusta l' osservazione $Mp : pm :: 1 : 10$;
dunque $1 : 10 :: \frac{12\frac{1}{2}}{40} : 4g = \frac{125}{40} = \frac{25}{8}$;
e perciò $IG = g = \frac{25}{32}$ di dito.

Egli è necessario, che il gorgo $SMeZ$
NT sia composto di innumerabili strati Mn,
acciocchè l' acqua possa passare gradatamente
dalla velocità della sezione ST a quella,
che conviene alla sezione eZ. Se le par-
ticole acquee fossero infinitamente piccole,
un numero immenso di sottilissimi strati
potrebbe formare un' altezza infinitesima $IG = g$.
Ma conciossiachè siano minutissime bensì
i termini del finito le particelle dell' acqua,
da una moltitudine grandissima di strati

na

ne risulta l'altezza finita $IG = g =$
$\frac{\sqrt{3b^3 \cdot b^2 - c^2}}{\sqrt{k+1 \cdot 3nnc \cdot b^2 - c^2}}$. Per la qual cosa la quantità
$k+1$ ha da stare sicuramente dentro i confini
delle grandezze finite.

Siano i diametri dei circoli b, c come
$100 : 1$, e dovendo stare $b : c :: 10000 : 1$,
fingasi $b = 10000$, $c = 1$ pollici quadrati.
In tale supposizione può sicuramente trascurarsi c^2 rispettivamente a b^2, e molto
più c^3 rispettivamente a b^3, onde la
formola prende il seguente aspetto
$g^2 = \frac{3b^2}{k+1 \cdot 3nnc}$. In luogo di n pongo la
sua prossima grandezza $\frac{355}{113}$, e sostituiti
in cambio di b, e di c gli stabiliti valori,
avremo $g^2 = \frac{339000000000}{k+1 \cdot 11360}$. Sia,
come si è raccolto dalle allegate sperienze
del Cavalier Newton, $g = \frac{25}{32}$, e si troverà
$k+1 = \frac{1064600000000}{221875} =$
4469239.

L'acqua sia discesa per lo spazio
$HQ = s$, e fatta $bs = cz$, esprime z la lunghezza del cilindro acqueo uscito pel
foro a. Nelle Annotazioni ho stabilito
il valore di $u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac - cs - gc + \frac{2bg}{3} + bz}}$, e appoggiata alle ipotesi, che nel vaso non s'infonda nuov'acqua, ond'essa si mantenga alla altezza costante a, ~~[illegible]~~ e che siano minimi il foro c, e l'altezza g del gorgo, ho stabilito che
trascurata la velocità orizzontale nel gorgo,
e supponendo la forza viva dell'acqua, che
esso comprende $= \frac{2cg \cdot u^2}{3}$. Si faccia uso
presentemente della forza viva $\frac{4cg \cdot u^2}{3}$,
che compete all'acqua del gorgo, calcolando
la velocità orizzontale, e si scoprirà
$u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac - cs - gc + \frac{4bg}{3} + bz}}$, e cancellati

negli esempj che addurrò, sono i termini $\frac{2cs}{3}$, $-gc$, che ~~[illegible]~~ fisicamente ~~[illegible]~~ minimi rispettivamente quello ad ac, questo a bg ~~[illegible]~~ $\sqrt{2a}$, ne nascerà $u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac + \frac{4}{3}bg + bz}}$ .. *

L'altezza g del gorgo si determina, conforme sopra ho insegnato, misurando il massimo ristrignimento della vena, e la sua distanza dal foro ed.

Ritorno all'esempio sovrapposto, in cui ho fatto $c = 1$, $b = 10000$, e sia di più $g = 1$ ~~[illegible]~~ $a = 60$. La superficie AB dell'acqua sia calata abbassata per lo spazio $s = \frac{1}{10}$ di pollice, onde sia $\frac{bs}{c} = z = 1000$, e si troverà

$u = \sqrt{2a} \cdot \frac{\sqrt{10000000}}{\sqrt{10013393\frac{1}{3}}}$, cioè

$u = \sqrt{2a} \cdot \frac{1000000000}{1000669442}$, o prossimamente $u = \sqrt{2a} \cdot \frac{1494}{1495}$, valore, che fisicamente si adegua a $\sqrt{2a}$.

Nell'Annotazione ho trovato il tempo t, in cui si scorre lo spazio z, trascurando la forza viva dell'acqua nel gorgo. Si cerchi ora il valore d'esso tempo, messa a computo la detta forza. Avremo pertanto

$dz \cdot \frac{\sqrt{ac + \frac{4}{3}bg + bz}}{\sqrt{2abz}} = dt$, e moltiplicando, e dividendo per $\sqrt{ac + \frac{4}{3}bg + bz}$,

$\frac{\overline{ac + \frac{4}{3}bg} \cdot dz + bz\,dz}{\sqrt{2ab \cdot \overline{ac + \frac{4}{3}bg} \cdot z + bz^2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{ac + \frac{4}{3}bg} \cdot dz + bz\,dz}{\sqrt{2ab \cdot \overline{ac + \frac{4}{3}bg} \cdot z + bz^2}}$

$+ \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{ac + \frac{4}{3}bg} \cdot dz}{\sqrt{2ab \cdot \overline{ac + \frac{4}{3}bg} \cdot z + bz^2}} = dt$, ed integrando,

* Aggiungo, che questa formola è vera più esattamente, quando l'acqua si sostiene all'altezza costante a, conforme agevolmente dimostrasi col metodo della riduzione, il quale c'insegna, che in tale incontro si trascura il solo termine $-gc$.

$\sqrt{}$

$$\frac{\sqrt{ac+\frac{4}{3}bg \cdot z + bz^2}}{\sqrt{nab}} + \frac{ac+\frac{4}{3}bg}{n\sqrt{nab^2}} \cdot \log 1 + \frac{n}{\sqrt{\frac{ac+\frac{4}{3}bg+bz}{bz}}-1}$$

$= t$, dovendosi prendere i logaritmi nella logistica dalla sottotangente $= 1$

Se tutto lo spazio z si passasse colla velocità $\sqrt{na}$, il tempo impiegato sarebbe $= \frac{z}{\sqrt{na}} = \frac{1000}{\sqrt{120}}$ nell'esempio addotto. Ora a questo valore si eguaglia prossimamente il termine $\frac{\sqrt{ac+\frac{4}{3}bg \cdot z + bz^2}}{\sqrt{nab}}$, quando lo spazio z è assai lungo. Ed infatti nel nostro esempio troveremo

$$\frac{\sqrt{ac+\frac{4}{3}bg \cdot z + bz^2}}{\sqrt{nab}} =$$

$$\frac{\sqrt{60 + 13333\frac{1}{3} \cdot 1000 + 10000 \cdot \overline{1000}^2}}{\sqrt{120 \cdot 10000}} =$$

$$\frac{\sqrt{13393\frac{1}{3} + 10000000}}{\sqrt{1200}} \text{ prossimamente}$$

$$= \frac{1000,669}{\sqrt{120}}$$

Calcoliamo adesso il valore del secondo termine $\frac{ac+\frac{4}{3}bg}{n\sqrt{nab^2}} \cdot \log 1 + \frac{n}{\sqrt{\frac{ac+\frac{4}{3}bg+bz}{bz}}-1}$.

Nell'esempio, che ci siamo proposti, abbiamo

$$\log 1 + \frac{n}{\sqrt{\frac{ac+\frac{4}{3}bg+bz}{bz}}-1} = \log 1 + \frac{n}{\sqrt{\frac{60+13333\frac{1}{3}+10000000}{10000000}}-1}$$

$$= \log 1 + \frac{n}{\sqrt{1+\frac{13393\frac{1}{3}}{10000000}}-1}.$$ Rifletto essere

a un di presso $\sqrt{1+\frac{13393\frac{1}{3}}{10000000}} = 1 + \frac{2009}{3000000}$, e perciò

log

$$\log.\ 1 + \frac{2}{\sqrt{\frac{ac+\frac{4}{3}bg+b2}{b2}}-1} =$$

$$\log\ 1 + \frac{8000000}{2009} = \log.\ 2967 + \frac{1128}{2009}$$

Ricorrendo alle Tavole avremo

$\log.\ 2967 = 3{,}4723523$, e fatti

i dovuti computi

$$\log.\ 2967 + \frac{1128}{2009} = 3{,}4753170.$$

Per passare dal logaritmo della tavola al corrispondente nella logistica della suttangente 2, si faccia

$10000000 : 23025851 ::$

$3{,}4753170 : 8{,}0022131$, ed

il quarto termine porgerà il logaritmo cercato, il quale dee moltiplicarsi

per $\frac{ac+\frac{4}{3}bg}{26\sqrt{2a}} = \frac{13393\frac{1}{3}}{20000\sqrt{120}} = \frac{2009}{3000\sqrt{120}}$.

Adempiuta la moltiplicazione avremo

$$\frac{ac+\frac{4}{3}bg}{26\sqrt{2a}}\cdot\log.\ 1 + \frac{2}{\sqrt{\frac{ac+\frac{4}{3}bg+b2}{b2}}-1} =$$

$\frac{5{,}3588154}{\sqrt{120}}$, e l'intero tempo

$t = \frac{1008{,}028}{\sqrt{120}}$.

Esprimeremo il tempo in secondi col mezzo della seguente analogia

$$\sqrt{362}\ .\ 1 :: \frac{1008{,}028}{\sqrt{120}} : \frac{1008{,}028}{\sqrt{362.120}}$$

$$= \frac{1008{,}028''}{208{,}422} = 5'' - \frac{38048''}{20842}$$

Se l'acqua fosse stata sempre fornita della velocità $\sqrt{2a} = \sqrt{120}$, avrebbe scorso lo spazio $2 = 1000$ in secondi

$\frac{1000}{\sqrt{362.120..}} = \frac{1000000}{208422} = 5'' - \frac{42110''}{208422}$.

Tutta la differenza adunque fra i due tempi consiste nella minuzia di secondo $\frac{6028}{208422} = \frac{[illegible]}{6.9}$, ed il primo tempo al secondo sta come 1006028 : 1000000 :: 167 : 166. ~~e quindi non considerata [illegible]~~

~~[illegible]~~

~~Che se si ricorra alla esperienza, [illegible]~~

~~[illegible]~~

Nella inversa ragione 166 : 167 si riferisca la media velocità, colla quale l'acqua cammina per lo spazio $z = 1000$, alla velocità $\sqrt{2a}$.

Assegnando allo spazio z valori più piccoli, si troverà maggior differenza fra la velocità dell'acqua, e $\sqrt{2a}$; e fra il tempo impiegato a scorrere lo spazio z, e la quantità $\frac{z}{\sqrt{2a}}$. Nel solito esempio suppongasi $z = 100$, e si troverà

$$u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac + \frac{4}{3}bg + bz}} = \sqrt{2a}\frac{\sqrt{1000000}}{\sqrt{1013393\frac{1}{3}}}$$

$$= \sqrt{2a}\frac{\sqrt{3000000}}{\sqrt{3040180}} = \sqrt{2a}\cdot\frac{150}{151}$$ prossimamente,

e dopo

e dopo i lunghi necessarj computi $t = \frac{104446''}{204422}$. Il tempo, in cui si passerebbe lo spazio $z = 100$ colla velocità $\sqrt{2a} = \sqrt{120}$, si agguaglierebbe a $\frac{100000''}{204422}$, e quindi il primo tempo al secondo si riferisce come $104446 : 100000$, o prossimamente come $23 : 22$, e nella ragione inversa $22 : 23$ corrisponde la velocità media, colla quale l'acqua scorre lo spazio $z = 100$, alla velocità $\sqrt{120}$

Pongasi finalmente $z = 1$, e ne risulterà $u = \frac{\sqrt{2ab z}}{\sqrt{ac + \frac{4}{3}bg + bz}} = \frac{\sqrt{2a}\sqrt{10000}}{\sqrt{23393\frac{1}{3}}}$ $= \sqrt{2a} \cdot \frac{10000}{15294}$, che sta a $\sqrt{2a}$ come $10000 : 15294$, o sia a un di presso come $2 : 3$.

Il tempo t impiegato dall'acqua a camminare lo spazio $z = 1$ ci viene manifestato dal calcolo $= \frac{2577''}{204422}$.

Lo stesso spazio si scorrerebbe colla velocità $\sqrt{2a}$ nel tempo $\frac{1000}{204422}$, e perciò fra i detti tempi passa la proporzione $2577 : 1000$, e nella ragione inversa si riferisce la velocità media, colla quale l'acqua viaggia per lo spazio $z = 1$, alla velocità $\sqrt{2a} = \sqrt{120}$.

Dai premessi computi si deducono parecchie conseguenze importanti. Se fossero matematicamente minimi il foro $CD = c$, e l'altezza $DG = g$ del gorgo;

la

la velocità $\sqrt{ra}$ si acquisterebbe adequatamente, prescindendo dalle resistenze, in tempo infinitesimo, e dopo aver corso uno spazio altresì infinitesimo, il quale si potrebbe dire con verità, essere stato passato dall'acqua colla equabile velocità $= \sqrt{ra}$, conforme ho spiegato nella citata Annotazione.

Ma quando c, e g sono grandezze finite, si richiede un tempo, ed uno spazio finito, acciocchè la velocità dell'acqua si adegui finitamente a $\sqrt{ra}$, e sia inoltre permesso l'asserire con finita approssimazione, che l'acqua abbia camminato il suddetto spazio colla velocità $\sqrt{ra}$ equabilmente. Continuando a servirmi dell'esempio consueto, se lo spazio $z = 1000$; la velocità $u = \sqrt{ra} \cdot \frac{1494}{1495}$ s'aguaglia finitamente a $\sqrt{ra}$, e stando il tempo vero a quello, che richiederebbe la velocità costante $\sqrt{ra}$, come $167 : 166$, non va molto lontano dal vero l'affermare, che l'acqua viaggia per lo spazio $z = 1000$ colla velocità equabile $\sqrt{ra}$.

Cangiata ipotesi, e mettendo $z = 100$, la velocità effettiva a $\sqrt{ra}$ corrisponde come $150 : 151$, ed il tempo vero all'ipotetico come $23 : 22$. Essendo pertanto la velocità media dell'acqua, colla quale ha passato lo spazio $z = 100$, $= \frac{22}{23}\sqrt{ra}$, è meno esatta l'asserzione, che il mentovato spazio colla costante velocità $\sqrt{ra}$ è stato dall'acqua percorso.

Pongasi

Pongasi in terzo luogo $z = 1$, e trovandosi $u = \frac{2}{3}\sqrt{2a}$, il tempo vero all' ipotetico come 2.5.77 :: 1.000; chi oserà mai di sostenere, che quando è uscito dal foro il cilindro acqueo cz, l' acqua sia fornita della velocità $\sqrt{2a}$, ed abbia con essa velocità equabile passato lo spazio $z = 1$?

Si ingannano adunque quegli Autori, che affermano scaturir l' acqua dal foro cz colla velocità $\sqrt{2HG} = \sqrt{2a}$. Nel principio del moto ella è minima la velocità dell' acqua. Si va poscia questa aumentando, e secondo che cresce lo spazio z, si approssima sempre più a $\sqrt{2a}$, di modo che nell' esempio addotto, quando $z = 1000$, la velocità $u = \frac{1494}{1495}\sqrt{2a}$ si può confondere con $\sqrt{2a}$, ed essendosi passato esso spazio colla velocità media $\frac{166}{167}\sqrt{2a}$; anche questa si accosta molto a $\sqrt{2a}$. In fatti nello stesso tempo $= \frac{1006024''}{2064.22}$ colla velocità $\sqrt{2a}$ avrebbe l' acqua scorso lo spazio 1006,024 in cambio dello spazio 1,000,000, i quali spazj differiscono soltanto per sei unità sopra mille.

Prescindendo dalla resistenza, come ho sempre fatto finora, richiede la massima velocità dell' acqua uscente pel foro cz, che esso sia minimo. Chi frattanto tale lo stabilisse, vedrebbe l' acqua gemere a stilla a stilla dalla resistenza sommamente impedita

impedita. Cala dunque la velocità dell' acqua, quando il foro troppo si strigne. Incontra nel medesimo inconveniente chi allarga il forame soverchiamente; perchè più scema la velocità per l'ampiezza del foro, di quello cresca per lo scemamento della resistenza. Quindi scorso dall'acqua un determinato spazio Z, la massima velocità corrisponde ad un dato foro, che può solamente determinarsi colla espe= rienza.

Ho notato di sopra, che l'acqua esce ristretta dal foro S T (Fig. 2.), e con velocità alquanto convergente verso l' asse Z G del foro predetto, ed ho recato un esperimento del Sig.r Newton, il quale dimostra, che essendo il diametro del foro $ST = \frac{5}{8} = \frac{25}{40}$ di dito, il diametro più ristretto della vena diventa di $\frac{21}{40}$ alla distanza di $\frac{1}{2}$ dito, o sia di $\frac{20}{40}$ dal foro. Da ciò ne risulta, che $ZS - Ge = \frac{2}{40}$ si riferisca a $ZG = \frac{20}{40}$ come $1 : 10$.

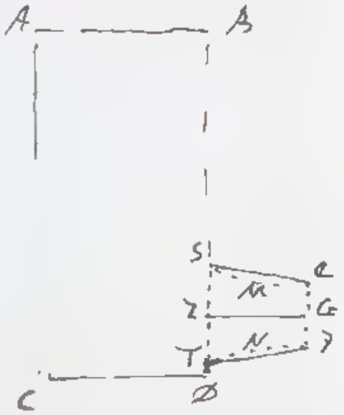


Fig. 2

Vogliasi adattare al vaso AD un frusto conico T S e 7, la cui lunghezza ZG = lin. 92 del piede Regio di Parigi, ed il diametro e7 = lin. 261, e resti da stabilirsi il diametro S T più confacente, acciocchè si faccia pel foro e7 il massimo esborso di acqua. Si otterrà l'intento mediante la considerazione di alcune belle sperienze contenute nell'Opera de Castellis dell'accuratissimo Sig. Marchese Giovanni Poleni pag. 18, 19, 20. Stando sempre costante l'altezza dell'acqua nel vaso,

che era

La base del vaso cilindrico era di linee quadrate 4929661 + $\frac{64}{256}$ e tutta l'acqua contenuta nel vaso uguale a linee cubiche 126204460

chi erano di lin. 256, ZG = lin. 92; e7 = lin. 26, facea ST = lin. 26, di modo che il cono si trasformò in un cilindro, ed il minimo diametro della vena, ove l'acqua è ridotta a un di presso alla sua naturale densità, lo trovai lin. 24½, ed il tempo, in cui si scaricò una determinata copia di acqua di pollici cubici 73035, uguale a 3', 7''. Posta quasi ST di lin. 33, crebbe il diametro della vena sino a lin. 25, e si sminuì il tempo, che si trovò 2', 57''. Si stabilì poscia ST di lin. 42, ed in questo caso la vena abbia il diametro di lin. 25¼, ed il tempo fu 2', 57'', o 2', 59''. Aumentata la retta ST sino a lin. 60, successe, che il diametro della vena calò sino alle lin. 24, ed al contrario crebbe il tempo a 3'. Tanto maggiormente fatta ST di lin. 116, diminuì la vena sino a lin. 23½, e crebbe il tempo col divenire 3', 4'', ovvero 3', 6''.

La quantità di fluido, che scaturisce dal foro e7, sta in ragione composta del quadrato del diametro della vena, del tempo, e della media velocità: ma la predetta quantità è costante; dunque la velocità media segue la ragione inversa del quadrato del diametro della vena, e del tempo. Avverto, che nel terzo, e nel quarto esperimento prendo il tempo medio 2', 58''; 3', 5''.

Velocità

Velocità media nei predetti esperimenti

1. come $\frac{1}{\overline{24\frac{1}{2}}^2 \cdot 187} = \frac{1}{112246\frac{3}{4}}$

2. come $\frac{1}{\overline{25}^2 \cdot 177} = \frac{1}{110625}$

3. come $\frac{1}{\overline{25\frac{1}{4}}^2 \cdot 178} = \frac{1}{113486\frac{1}{8}}$

4. come $\frac{1}{\overline{24}^2 \cdot 180} = \frac{1}{103680}$

5. come $\frac{1}{\overline{23\frac{1}{2}}^2 \cdot 185} = \frac{1}{102166\frac{1}{4}}$

Considerando la serie di queste velocità, agevolmente si scopre, che anderebbero regolarmente crescendo, se non ci fosse la terza, la quale da cotal legge si parte. La terza sperienza adunque è stata turbata da qualche a me ignoto elemento, nè della stessa si può tener certo conto. Sembra, che il diametro della vena dovesse stare di linee $25 - \frac{1}{4}$, piuttosto che di lin. $25 + \frac{1}{4}$. Così la velocità si troverebbe come $\frac{1}{\overline{24\frac{3}{4}}^2 \cdot 178} = \frac{1}{109036\frac{1}{8}}$, e starebbe di mezzo fra quelle degli esperimenti 2, e 4.

Se il cilindro, o il frusto conico facesse il solo effetto di costipar l'acqua, che per esso fa transito; si raccoglie dalla mia formola $u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac+\frac{2}{3}bg+bz}}$, che la velocità media dovrebbe divenir minore, secondo che andasse crescendo il diametro del foro $ST = c$. Ma succedendo tutto al

al contrario; egli è indizio manifesto, che passando l'acqua pel tubo, e si condensa, e si accelera. La resistenza che incontra cagionata dal fregamento delle pareti del canale, ed anche (quando massimamente il diametro ST è soverchiamente grande in riguardo alla AZ) dal non poter l'acqua contenuta nella sezione ST capire nella AZ, fa sì che la gravità dell'acqua rinchiusa nel vaso AD seguiti ad accelerare quella porzione di fluido, che cammina pel tubo. Quindi la resistenza sino ad un certo segno torna in vantaggio: non altrimenti che in una cerbottana, o in uno schioppo; che fanno maggior colpo, qualora si sparano all'insù contrastante la gravità della palla, che quando si sparano all'ingiù a seconda della gravità della palla medesima.

Il tempo impiegato nell'uscita di una determinata quantità di acqua accetta la ragione inversa della sezione della vena, e della media velocità. Se il diametro ST, che era prima di lin. 10, si fa di lin. 33, abbiamo l'accrescimento della sezione della vena, che è una conseguenza della condensazione dell'acqua, e si aumenta altresì la velocità; laonde per doppio motivo decresce il tempo, in cui si scarica la quantità data di fluido. Ingrandito il diametro ST, cresce è vero la velocità; ma messa l'acqua in iscompiglio a cagione di dover

far

far passaggio per sezioni rispettivamente troppo ristretta, riceve minore costipazione, e la sezione della vena diviene più piccola a proporzion dell' aumentazione della velocità; talmente che il tempo della uscita dell' acqua si trova a grado a grado sempre maggiore, quanto più il diametro ST supera la linea 33.

Considerando siccome costanti i due diametri ST, a7, ci sarà la lunghezza ZG, che sopra tutte abbrevierà il tempo dell' uscita dell' acqua. Già si è veduto, che fatto ST = a7 = lin. 261, ZG = lin. 92, fu il diametro della vena lin. $24\frac{1}{2}$, il tempo dello scarico 3', 7'', e la velocità come $\frac{1}{\overline{24\frac{1}{2}}^{2}\cdot 187} = \frac{1}{112246\frac{3}{4}}$.

Ora nella lodata Opera De Castellis abbiamo un' altra sperienza alla pag. 21., che segnerò col numero 6, in cui non ponendo mano nei diametri ST = a7 = lin. 261, si stabilisca ZG = lin. 2, sostituendo una lamina al tubo cilindrico. Il diametro della vena più ristretta si trovò lin. $20\frac{1}{2}$, ed il tempo dell' uscita in due sperimenti 4', 36'', ed in un terzo 4', 34''. Attenendomi ai due primi esperimenti, scopro la velocità media dell' acqua come $\frac{1}{\overline{20\frac{1}{2}}^{2}\cdot 276} = \frac{1}{115949}$.

Allungando adunque il cannone S7 dalla linea 2 sino alla lin. 92, il diametro della vena è cresciuto lin. 4, il tempo dello scarico è scemato 1', 29'', e la velocità media si è aumentata in

ragione

ragione di 11 2 2 4 6 : 11 5 9 4 9 prossimamente come 30 : 31. Quale poi sia la massima lunghezza ZG, a cui corrisponda il minimo tempo, si scoprirebbe con replicate diligenti sperienze.

Si può anche paragonare la velocità della esperienza 6.ta con quella della 5.ta, le quali si riferiscono come $\frac{1}{115949} : \frac{1}{102160}$, cioè a un di presso come $7\frac{1}{2} : 8\frac{1}{2}$.

Cerchiamo ora la misura assoluta della velocità nella 2.da esperienza, la quale mi dà lo sborso della quantità costante di acqua nel minimo tempo. Chiamato d il diametro della vena, ed espressa per $1 : n$ la proporzione fra il diametro, e la circonferenza circolare, sarà la sezione della vena $= \frac{nd^2}{4}$. Dunque $n = \frac{355}{113}$, ed essendo nella 2.da sperienza $d =$ lin. 25; troveremo $\frac{nd^2}{4}$ $= \frac{221875}{452}$ prossimamente uguale a linee quadrate 492. La quantità costante di acqua uscita pel foro EF era di pollici cubici 73035 uguali a linee cubiche 126204480. Dividendo questo numero per $\frac{221875}{452}$ sezione della vena, il quoziente = lin. 257107 è lo spazio scorso dall'acqua in secondi 177″. Averemo dunque la velocità media dell'acqua stessa $= \frac{257107}{177}$ $= 1452$.

L'acqua conforme ho detto di sopra

ora

eva sostenuta nel vaso all'altezza di lin. 256 = a.... Se ci vuole un minuto secondo, acciocchè un grave scorra con moto accelerato poll. 141 = lin. 2132, per passare con moto parimente accelerato lin. 256, si richiederà il tempo determinato dalla seguente analogia

$$\sqrt{2132} : \sqrt{256} = 16 :: 1'' : \frac{16''}{\sqrt{2132}} = t.$$

e conciossiachè nello stesso tempo colla equabile velocità terminale cammina il corpo uno spazio doppio = 512, sarà la sua velocità $= \frac{512}{t} = \frac{512\sqrt{2132}}{16}$ $= 32\sqrt{2132} = 1491.$

La velocità media pertanto dell'acqua nella sperienza seconda alla velocità di un grave disceso dalla sublimità di lin. 256, a cui s'alzava l'acqua dentro del vaso, stava come 1434 : 1491, o sia prossimamente come 37½ : 39 : e perchè la velocità massima è maggiore della media; la velocità massima e quella di un grave caduto da lin. 256 si riferirà in una ragione più prossima di 37½ : 38½.

Sembra strano a prima vista, che la velocità media dell'acqua nell'esperimento quarto, e molto più nel quinto superi quella del predetto grave = 1491. Risrignandomi a fare il computo in riguardo alla sola quinta sperienza, osservo ch'essendo il diametro più picciolo della vena = lin. 23½, la sezione della vena stessa è di linee quadrate 434, per cui dividendo la

massa

massa dell'acqua scaturita dal foro = linee cubiche 126204480, ne risulta lo spazio scorso dall'acqua uscita in minuti secondi 185 uguale a 290794, e conseguentemente la velocità media cercata $= \frac{290794}{185}$ $= 15'72$, che corrisponde a quella del mentovato grave come $15'72 : 1491$, o sia a un di presso come $19\frac{1}{2} : 18\frac{1}{2}$.

Cesserà ben presto la meraviglia, se si farà la riflessione, che l'acqua spiccia rarefatta fuori del vaso. Sia la velocità dell'acqua giunta all'equabile, ed allora, conforme a quanto ho provato nell'Annotazione, agendo la gravità della massa di acqua ab rinchiusa nel vaso per lo spazio ds, imprime la velocità u al volume di acqua $b\,ds$, che nel tempo dell'azione scaturisce fuori dal buco. Se il volume $b\,ds$ ritenesse la densità dell'acqua stagnante, come nell'Annotazione ho supposto, si avrebbe la formola prescindendo dalla resistenza $ab\,ds = b\,ds \cdot \frac{u^2}{2}$, e dividendo per $b\,ds$, $a = \frac{u^2}{2}$, o sia $\sqrt{2a} = u$, cioè la velocità dell'acqua uscente pel foro uguale a quella di un corpo disceso dall'altezza a, a cui si sostenta l'acqua dentro del vaso. Ma se è rarefatto il fluido formante il volume $b\,ds$, allora la sua massa si eguaglia a $\frac{b\,ds}{k}$, dinotando k un numero maggiore della unità. Quindi la formola prende il seguente aspetto

$ab\,ds$

$ab\,ds = \frac{b\,ds}{k} \cdot \frac{u^2}{2}$, e ne risulta ~~u = \sqrt{ka}~~ $u = \sqrt{k.2a}$ maggiore di $\sqrt{2a}$. Ristringendosi il diametro della vena nella sperienza quinta dalle linee 26 sino alle lin. 23 $\frac{1}{2}$, e nella quarta dalle lin. 26 alle 24; il numero k è tal=mente grande, che malgrado la resis=tenza la velocità media supera $\sqrt{2a}$.

Io sono persuaso, che assegnata al cannone $S7$ la figura del gorgo espressa nella Fig. 1, si ottenesse lo sborso della data quantità di fluido nel minimo tempo, ritenendo il dia=metro $e7$ di lin. 26, e determinando con varie sperienze la misura del diametro ST, e della lunghezza ZG. Le due curve SMe, $TN7$ dispongono l'acqua ad uscire costipata pel foro $e7$, e con pochissima velocità ten=dente verso l'asse ZG.

Annotazione

In queste Riflessioni ho provato, che la velocità media acquistata dall'acqua uscita dal foro nell'esperienza seconda stava a quella di un grave disceso dall'altezza a = lin. 256, a cui si conservava l'acqua den=tro del vaso, come 1452 : 1491. Ho dimos=trato nella Memoria sopra la Figura del Gor=go, che prescindendo dalla resistanza, dee valere la formola $\frac{\sqrt{(2abz)}}{\sqrt{(ac+bz)}} = u$. Cerco il valo=re dello spazio z, acciocchè sia $u = \frac{1452}{1491}.\sqrt{512}$.
Avremo pertanto $\frac{\sqrt{(2abz)}}{\sqrt{(ac+bz)}} = \frac{1452}{1491}.\sqrt{512}$, ed alzando al quadrato, e dividendo per $2a = 512$,

$\frac{bz}{ac+bz} = \frac{2108304}{2223081}$. Sostituisco in vece di $a = 256$, e di $b = 492986$, e di $c = 491$ i loro valori, e trovo $\frac{492986.z}{125696+492986.z} = \frac{2108304}{2223081}$, e ridotto il computo $z =$

$\frac{265005379584}{56090468122} = \text{lin. } 5 - \frac{15447003426}{56090468122}$

Posto che fosse vera la formola $u = \frac{\sqrt{(2abz)}}{\sqrt{(ac+\frac{4}{3}bg+bz)}}$ da me stabilita nelle sovrascritte Riflessioni, si avrebbe l'equazione $\frac{\sqrt{(2abz)}}{\sqrt{(ac+\frac{4}{3}bg+bz)}} =$

$\frac{1452}{1491}.\sqrt{(512)}$. Si ponga $a = 256$, $b = 492986$, $c = 491$, $g = 12$, e dopo le necessarie operazioni ne risulterà $z = \frac{16894835071488}{56090468122}$

$= \text{lin. } 301 + \frac{11604166766}{56090468122}$.

Acciocchè dunque l'acqua acquistasse la velocità uguale a quella dell'esperienza seconda, sarebbe necessario, che la gravità dell'acqua dentro dal vaso accelerasse lo spillo per lo spazio di lin. 301, laddove per la formola $\frac{\sqrt{(2abz)}}{\sqrt{(ac+bz)}} = u$, la detta velocità si guadagna scorrendo lo spazio $z =$ lin. 5 calanti; la quale troppo notabile differenza mi fa dubitare della verità della formola $u = \frac{\sqrt{(2abz)}}{\sqrt{(ac+\frac{4}{3}bg+bz)}}$ Per la qual cosa io penso, che la velocità orizzontale si cangi in verticale. Col mezzo di quella le particole s'introducono fra strato e strato, ed accrescendo la pressione dello strato inferiore, ne aumentano la velocità verticale. Nulladimeno qualche velocità orizzontale rimane nell'acqua uscita dal foro, come apertamente dimostrano le contrazioni della vena negli esperimenti del Newton, e del Marchese Poleni.

Lettera

al Sig.r Roberto Zucchereda Nobile Trivigiano
sopra le regole più importanti delle
strutture Architettoniche:

è impressa nella Raccolta di varj Opuscoli
interessanti di più celebri autori parte inediti,
e parte editi, ma rarissimi. Tomo I. Firenze
presso Domenico Marzi, e Compagni.
1781

Sopra le Regole ~~principali~~ più importanti della Struttura Architettoniche.

è contenuta questa Lettera nella Raccolta di varj Opuscoli interessanti di più celebri Autori parte ~~Dissertazioni~~ inediti, e parte editi ma rarissimi Tomo I. Firenze MDCCLXXI. Presso Domenico Marzi, e Compagni.
~~del Sig. Co. Giordano Riccati~~

I. I libri dei migliori Architetti insegnano bensì a costruire un ordine, un arco, una porta, una finestra ec., ma poco o nulla parlano della combinazione di queste parti per formare un ben regolato edifizio; di modo che conosco una persona, che dopo avere studiate per lungo tempo le opere più accreditate, non era mai giunto a ben intendere l'Architettura, a cui poscia bastarono poche istruzioni del rinomato Signor Francesco Maria Preti per divenire un valente Architetto, ed acquistar fama, e riputazione. Lo stesso Signor Preti stimolato ad applicarsi all'Architettura dal celebre Signor Co. Giovanni Rizzetti per occasione della riedificazione del Duomo di Castelfranco, fu principalmente guidato ad una sì bella, e con ragione applaudita struttura da due principj suggeritigli dal Co. Jacopo Riccati mio Padre, col quale assiduamente conversava; cioè che fra l'arco medio, e massimo debba essere similitudine, e che l'altezza del tempio avesse da stabilirsi media proporzionale armonica fra la lunghezza, e la larghezza. Giudico dunque profittevole all'Architettura l'annoverare le più importanti Regole della Struttura Architettonica, onde gli studiosi possano acquistare chiara idea di un'arte sì bella, e leggere con maggiore discernimento, e vantaggio le opere in tale materia le più stimate.

Regola I.

II. Metto in primo luogo quella regola, che è precisamente necessaria per la retta combinazione degli archi, vale a dire che gli archi di varia grandezza, i quali hanno luogo nella stessa struttura, debbano esser simili, onde la larghezza, e l'altezza si corrispondano nella medesima proporzione. Ella è manifesta la ragione di questa regola; imperciocchè gli archi dissimili, essendo necessariamente uno più svelto dell'altro, mal possono convenire alla medesima struttura, cui levano quella correlazione, e

perfetta

perfetta unità, che deve legare insieme tutte le parti. Nella Dissertazione della Combinazione degli Archi ho talmente concertate le misure degli archi, e degli ordini, che richiedendo archi simili un ordine con piedestallo, e l'altro a terra, si possono essi accoppiare, quello in figura di principale, e questo di secondario, dando così varietà all'edifizio senza pregiudizio della necessaria uniformità. Esempigrazia l'ordine Ionico con piedestallo si unirà collo ordine Composito a terra, perchè ad entrambi compete l'arco alto larghezza 2 $\frac{1}{8}$ se ha il serraglio, o pure 2 $\frac{1}{4}$ se di serraglio sia privo. La maggiore sveltezza, che reca all'ordine il piedestallo, fa sì che due ordini il primo con piedestallo, ed il secondo a terra crescente di un modulo appariscano all'occhio egualmente robusti, o gentili, e perciò si compiace di vederli congiuntamente adoprati. E qui egli è di uopo notare ingannarsi a partito quegli Architetti, che nella Chiesa fanno l'ordine principale con piedestallo più gracile del secondario; imperocchè l'arco stesso non può mai essere ad amendue conveniente. Il non aver mai pensato alla combinazione degli archi, gli ha fatti cadere in un errore, che per dire il vero non può difendersi.

Regola II.

III. L'altezza di un vaso sia media proporzionale armonica fra la larghezza, e la lunghezza. La vera regola delle altezze deve sfuggire l'inconveniente, che alla lunghezza infinita corrisponda l'altezza parimente infinita. Essendo massima comunemente ricevuta, che l'altezza abbia da stare di mezzo fra la larghezza e la lunghezza, Andrea Palladio (a) suggerisce tre medietà, l'aritmetica, la geometrica, e l'armonica, senza dare ad alcuna la prelazione, non accorgendosi che le due prime non si possono ammettere; perchè quando la lunghezza cresca all'infinito, richiedono infinita l'altezza. Quanto assurdo non sarebbe l'assegnare ad un portico largo due pertiche, e lungo mille l'altezza media aritmetica di pertiche cinquecento ed una, o pure l'altezza media geometrica

(a) Lib. I. Cap. XXII.

di

di pertiche 4 4/11 o un di presso! Allora che la lunghezza divenne infinita, la media armonica determina l'altezza doppia della larghezza, e tale altezza appunto si assegnerebbe praticamente al portico recato in esempio. Si uguaglia la nostra media al doppio prodotto della lunghezza, nella larghezza diviso per la somma di queste due dimensioni; e quindi al mentovato portico competerebbe l'altezza media armonica di pertiche $\frac{4000}{1002} = 4 - \frac{1}{125\frac{1}{4}}$, ch'è prossimamente doppia della larghezza.

IV. "Concciossiachè si possano dare innumerabili medietà fra la larghezza e la lunghezza di un vaso, le quali divenendo questa infinita stiano dentro i limiti del finito, egli è di uopo provare che l'armonica debba a tutte universalmente anteporsi. Ha insegnato il Galileo, e l'ha confermato colla esperienza, che quelle semplici proporzioni, che piacciono all'orecchio, recano diletto anche all'occhio. Espressi i suoni per le lunghezze dei tempi di una loro vibrazione, onde il numero maggiore dinoti il suono più grave, il perfettissimo accompagnamento musico nasce dall'armonica divisione delle due semplici ragioni 2:1, 3:2, che si chiamano Ottava, e Quinta. Per il principio adunque del Galileo se la lunghezza, e la larghezza di un vaso si riferiranno nelle dette proporzioni, dovrà scompartirsi questa armonicamente, affine di stabilirne l'altezza. E giacchè il canone della media armonica, come abbiamo veduto, a tutti i casi si adatta, merita sopra qualunque altro di esser prescelto, accoppiandosi in esso e la universalità, e l'elegan , e determinando, se il vaso è lunghissimo, l'altezza doppia della larghezza; conforme di fatto in tali circostanze si pratica.

V. Non dissimulo frattanto, che non tutte le semplici proporzioni, e molto meno le più composte la Musica le divida armonicamente. Se questa divisione introduca ragioni, in cui ci entrino numeri primi maggiori del cinque, si sostituisce all'armonica una prossima medietà, nella espressione della quale i detti numeri primi non abbian luogo. La media

armonica

armonica esemplificata dalla proporzione 8 : 5, cui si dà nome di Sesta minore, si agguaglia ad $\frac{80}{13} = 6\frac{2}{13}$. Per ischivare il numero primo 13, si serve la Musica del numero medio 6, e scompartisce la Sesta minore nelle due ragioni 8 : 6, o sia 4 : 3, e 6 : 5 Quarta, e Terza minore. Questa libertà di surrogare il prossimo semplice all'esatto composto la concede di buona voglia anche all'Architettura; sebbene l'attività dell'occhio in questo genere di giudizj è talmente limitata, che le due medietà $6\frac{2}{13}$, 6 le prenderà facilmente l'una per l'altra: e quindi consiglio l'Architetto senza tante sottigliezze a porre in opera la media armonica giusta almeno a un di presso.

VI. Si assegni l'altezza media armonica fra la lunghezza e la larghezza a que' vasi, che non l'hanno altronde determinata; e di tal fatta sono le chiese ad una sola nave, le sale, le logge, ed anche le camere principali, quando le circostanze permettano (dovendo il pavimento di un appartamento esser tutto ad uno stesso livello) di ammezzare le camere piccole. Nelle chiese a tre navi, che altro non sono che archi continuati, l'altezza è già stabilita, e lo stesso dicasi della cappella maggiore o presbiterio, del coro, e delle cappelle laterali, nelle chiese di una nave sola; imperciocché la loro altezza dipende da quella degli archi massimo, e medio. Se nelle chiese a più navi di ordine Ionico, Composito, o Corintio l'altezza della nave principale, e della secondaria sembra soverchia, siccome quella che supera le due larghezze, si rifletta che esse navi non sono chiuse e che la vicendevole comunicazione, che forma come un solo vaso, fa sì che l'altezza non sopravabbondi. Io per altro schiverei di usare gli archi Corintj senza sarvaglio alle larghezze due e mezzo, e scegliendo in qualità di primario l'ordine Ionico, o Composito con piedestallo, metterei il sarvaglio all'arco medio, onde l'altezza degli archi divenisse o di due larghezze ed un ottavo, o di due larghezze ed un quarto.

VII. Egli è di uopo dir qualche cosa della proporzione fra l'altezza dell'ordine, e quella della saetta della volta fatta

la

la scelta dell'ordine con piedestallo o senza per una chiesa, ed ornando l'arco medio o col serraglio, o col solo archivolto, i canoni delle combinazioni degli archi ci manifestano la larghezza dell'arco massimo, ed essendo la saetta della volta uguale al diritto dell'arco mentovato, più il raggio, più l'archivolto, essa è già stabilita, salvo qualche avviso nella misura del diritto, che influisca qualche poco anche in quella del raggio. Se l'ordine sia Toscano a terra, e l'arco medio abbia serraglio, ed all'arco massimo si dia un modulo di diritto, l'altezza dell'ordine alla saetta della volta, stava come 16 : 11 $\frac{1}{2}$. Ma se passando all'opposto confine l'ordine sarà Corintio con piedestallo, e l'arco medio privo di serraglio, ed all'arco massimo si assegnerà il diritto di due moduli, l'ordine alla saetta della volta corrisponderà nella proporzione di 30 : 11. In que' casi dove c'è libertà, io dividerei l'altezza in quattro parti, e ne assegnerei tre all'ordine, ed una alla saetta della volta. Quando il vano è quadrato, la saetta della volta pareggia la quarta parte della larghezza, e posto che sia lunghissimo, la saetta si uguaglia alla metà della larghezza; conforme realmente si costuma nei portici.

Regola III

VIII. Abbia ogni peso il suo particolare sostegno, e ad un peso maggiore un più robusto sostegno si sottoponga. Peccano contro questa regola coloro, che sopra una colonna sola ci pongono un pajo di archi. Ogni arco ha da essere fornito della sua aletta, ed accanto l'aletta deve collocarsi la colonna col suo sopraornato, la quale nello interno dei vasi è destinata a portare la volta. Molti Architetti formano il presbiterio nelle chiese con quattro archi, e non ponendo negli angoli colonna nè quadra, nè rotonda, fanno sì che gli archi stessi la volta sostentino. Riuscirà la struttura assai più elegante, se si addosserà la volta alle colonne negli angoli situate. Il Sansovino ha ottimamente ideata la pianta della cappella maggiore di S. Fantino in Venezia con quattro archi, e con altrettante colonne isolate negli angoli; ma in vece di far sì che la volta piombi sulle colonne, ha posto sopra le stesse quattro archi concentrici ai nominati, e per conseguenza

dissimili

dissimili, e costrutta poi sopra di questi la volta. Il Signor Francesco Maria Preti ha corretto questo errore nella bella tribuna del Duomo di Castelfranco.

IX. Le vele delle cupole sono una specie di volta. Se la cupola è fondata sopra il quadrato, i lati del quale si agguagliono alla larghezza di un arco più le sue alette, le vele sono sostenute dagli archi. Ma se la cupola ha per fondamento un ottangolo, in cui i lati maggiori siano formati dagli archi colle loro alette, ed i lati minori si adornino con colonne, sopra di queste deggiono piombare le vele, e adattarsi poi nella loro parte superiore al circolo, che tocca i quattro archi, il diametro del quale pareggia quello della cupola. Di tale natura è la cupola del Duomo di Castelfranco, e le vele della stessa sono di mia invenzione.

X. Resta ch'io spieghi la seconda parte della Regola III. che ad un peso maggiore un più robusto sostegno si sottoponga. I risalti nei sopraornati da parecchi Architetti vengono usati senza ragione. Debbono essi frattanto adoprarsi allora che un peso maggiore ha bisogno di una forza più grande che il regga. Nel mezzo della facciata di un palagio si ponga un frontispicio, e questo peso aggiunto richiede, che il sopraornato risalti, o sottoponendo soltanto le colonne al frontispicio, e lasciandone senza il restante della facciata, o accrescendone rispettivamente alle altre lo sporto. Se nella chiesa non vi fossero mezzelune al di sopra degli archi laterali, e della cornice, si dovrebbe questa fare senza risalti, perchè il peso sarebbe da per tutto uniforme. Ma interrompendosi a cagione delle lunette la volta, il sopraornato sotto di esse non porta il peso della volta, e perciò si ritira a piombo degli archi inferiori, e sporge in fuori sopra delle colonne, che della volta la pressione sostengono. In riguardo agli intercolunnj collocati negli angoli, o anche fra mezzo gli archi la cornice si dee continuare senza risalti, poichè ogni suo punto egual peso sostenta. L'Architetto di questa chiesa di Santi Quaranta, ch'io credo il Gandino, benchè venga attribuita al Palladio, ha fatto dei risalti nei mentovati intercolunnj; ed è stato

perciò

perciò costretto a costruire la volta a piombo delle muraglie, rendendosi così inutili le colonne, levate le quali la volta sussisterebbe.

Regola IV

XI. Non si taglino gli architravi, i fregi, le cornici, ed i frontispici, e si abbia cura di continuare la linea. L'architrave rappresenta una trave sostenuta da due colonne; la quale certamente precipita, se non è intera. Ha commesso un grave errore l'Architetto dell'Anfiteatro di Verona formando gli architravi a pezzi, i quali dinotando pezzi di pietra l'uno dall'altro staccato; mal si confanno colle architrave, che anche quando ha piccolo aggetto, per sua natura deve almeno apparire tutto di un pezzo. Essendo destinata la cornice per difendere[+] l'edificio dalle ingiurie delle stagioni; devesi per ogni dove continuare: e se non si interrompe nè architrave, nè cornice, molto meno si dovrà ciò effettuare nel fregio, che sta di mezzo fra l'uno, e l'altro. E conciossiachè le due parti del frontespicio si sostengano mutuamente colle contrarie uguali pressioni, egli è totalmente irragionevole il romperlo. Che se il frontespicio si costruisca curvo, diviene una specie di arco, il quale non si può reggere quando si spezzi.

XII. Dalla continuazione della linea dipende in gran parte l'eleganza della struttura. Se l'ordine principale ha piedestallo, si continua il basamento di questo, acciocchè serva di base all'ordine secondario; e se è collocato a terra, si sottoponga all'ordine secondario una base tanto alta quanto quella del principale, continuando per lo più il toro superiore e la cinta; e formando del resto un plinto. Nelle chiese suole mettersi sotto l'ordine un zoccolo di tale altezza, che in esso capiscano i tre scalini degli altari laterali e gli altrettanti, che ascendono alla tribuna. Ma quello che fa spiccare l'industria dell'Architetto si è il ben connettere colla struttura principale le nicchie, le porte, le finestre, gli altari &c. Un altare esempigrazia o dee radere col frontespicio l'imposta continuata dell'arco medio, nel cui vano però è collocato, o la sua cornice dee seguitare la

linea

linea dell'imposta suddetta. Nel Duomo di Castelfranco l'imposta dell'arco medio gira tutto all'intorno, e con bella armonia serve a determinare nicchie, porte, finestre, altari, cantorie &c. Anche qui nella Cattedrale di Trevigi (benchè io sia stato obbligato a proseguire il principio di Pietro Lombardo peccante di torto, e a non metter mano nella cappella assai preziosa del S.mo Sacramento) l'ordine secondario formerà gli altari, e l'ornamento interno della porta maggiore. Contengono una esattissima continuazione di linea le facciate del palagio Spineda a Venegazzù, e del teatro Onigo in Trevigi, opere tutte e due del valente Architetto Signor Giovanni Miazzi. Ha il Longhena combinati insieme, ed ottimamente legati tre ordini nel tempio della B. Vergine della Salute in Venezia. Il sopraornato del primo sormonta l'arco maggiore, ed i sopraornati del secondo, e del terzo agli archi maggiore, e minore servono di imposta. Merita in questo tempio di essere attentamente osservata la industriosa continuazione di linea, colla quale sono connessi i tre ordini mentovati. Avverto che peccano in qualche modo contro la regola della continuazione della linea coloro, che non sottopongono immediatamente o il serraglio, o l'archivolto degli archi medio, e minimo al sopraornato degli ordini primario, e secondario. In tale difetto è caduto il Palladio nel tempio di S. Giorgio maggiore in Venezia.

Regola V.

XIII. Oltre la solidità intrinseca e reale, si rende altresì necessaria negli edifizj la solidità apparente. Di questa regola ho dato qualche cenno, quando ho condannato gli architravi formati a pezzi, ed ora mi accingo a maggiormente illustrarla. Non vi ha dubbio che una struttura sia per recare disgusto all'occhio, quando apparisca mancante della necessaria solidità, quantunque veramente non ne sia priva. Gli architravi dell'anfiteatro di Verona, i quali hanno durato tanti secoli, sono intrinsecamente solidi, e pure non appagano la vista, perchè contro la loro natura chiaramente li conosce formati di pezzi. Un frontespizio spezzato non potrà cadere, perchè fortemente con ferri alla muraglia raccomandato;

ma

ma conciossiaché i ferri non appariscano, lo spettatore perito dimanda qualmente si possa reggere. Per altro egli è sempre pericoloso supplire con istraordinarj ferramenti alla solidità di una fabbrica. La facciata della chiesa dei Padri Carmelitani Scalzi di Venezia si è dovuto non ha molti anni nuovamente munire con ferri, perché logorati gli antichi minacciava rovina: ed essendosi nella Basilica di S. Marco della stessa Città rotta una grossissima catena di ferro applicata ad un arco, che sosteneva una cupola, è stato necessario puntellare la cupola stessa con infinito dispendio, affine di rimettervi la catena. Queste solidità chiamate per così dire in sussidio o presto o tardi tradiscono; il che non succede quando l'edifizio, come per esempio la Rotonda di Roma, è solido di per se stesso. [illegible]

Regola VI.

XIV. Nel mezzo di un lato dell'edifizio non mai la colonna, ma bensì l'intercolunnio maggiore si ponga, e gli intercolunnj, e gli ornamenti a destra e a sinistra siano interamente corrispondenti, avendo anche mira alla medietà secondaria; e di più gli intercolunnj negli angoli di un vase si facciano uguali. Non deve recar maraviglia, che nel tempio di S. Antonio di Padova cominciato a fabbricare con quella maniera, che si chiama Gotica, poco dopo la morte del Santo, un arco grande ne capisca due piccoli, di modo che peccando contro la medietà secondaria, il pilastro, che separa due archi piccoli, cada a mezzo dell'arco grande. Stupisco bene che questo difetto sia stato puntualmente imitato da Andrea Ricci Brioschi eccellente fonditore di bronzi, ed architetto della Chiesa di S. Giustina. Se non che egli merita scusa a considerato il tempo, in cui fiorì, e perché ha dovuto valersi delle fondamenti già piantate conforme il disegno disapprovato dell'allora Generalissimo delle Armi Venete del Sr. D. Girolamo da Brescia. Non saprei frattanto in qual maniera difendere l'Architetto della Cattedrale della stessa Città, il quale seguitando i descritti esempj, ha disposto gli archi minori a due a due più nella tribuna con disordine intollerabile. Comincia la chiesa di

S.

S. Giustina con tre archi grandi, ed indi proseguisca con un arco picciolo. Se il Brioschi avesse aggiunto nel principio della chiesa un arco picciolo, lo spettatore situato dirimpetto l'arco grande di mezzo avrebbe trovata di parte e di altra perfetta corrispondenza, ed il primo arco grande non avrebbe avuto forza di spingere, qualmente è successo, la facciata fuori di piombo. Il Palladio altresì nella sopra nominata chiesa di S. Giorgio maggiore in Venezia non ha adempiuto un esatto accompagnamento, formando la nave principale sino alla crociera con un intercolunnio largo vicino alla facciata; con tre archi medj; e con un intercolunnio stretto.

XV. Benchè sia parere doversi determinare uguali gli intercolunnj negli angoli delle gran camere, delle sale, e della chiesa, nulladimeno questa regola così congrua viene trasgredita frequentemente, e ne abbiamo un esempio in questo tempio di Santi Quaranta. E giacchè lo occasione mi si presenta, noto che le misure degli archi con serraglio, o senza da me stabilite in altra Dissertazione, ed i canoni della combinazione degli archi medio, e massimo mi rendono nota in moduli, scelto che sia l'ordine, la lunghezza, la larghezza, e l'altezza di una chiesa ad una sola nave, restando solo da stabilirsi i due, o quattro intercolunnj nella lunghezza, ed i due intercolunnj nella larghezza, che tutti deggiono essere uguali. Siano a, b i numeri dati dei moduli nella lunghezza, e nella larghezza della chiesa, ed x il numero dei moduli, che deggiono comporre un intercolunnio, e collocandosi per esempio nella lunghezza due soli intercolunnj, sarà la detta lunghezza $= a+2x$, e la larghezza $= b+2x$. Chiamo c l'altezza nota espressa in moduli, e poichè questa esser dee media armonica fra la lunghezza, e la larghezza, si aguaglierà al doppio loro prodotto diviso per la loro somma, onde ci si presenti l'equazione

$$\frac{\overline{2a+4x}\,.\,\overline{b+2x}}{a+b+4x} = c,$$

la quale maneggiata coi noti metodi ci manifesta il valore dell' intercolunnio

$$x = \frac{\sqrt{a^2-2ab+b^2+c^2}-a-b+c}{4}.$$

Si prenda dunque la

differenza

differenza fra le quantità note a, b nella lunghezza, e nella larghezza, ed al suo quadrato si aggiunga quello dell'altezza c; e dalla radice estratta da questa somma si sottragga la differenza fra l'aggregato $a+b$ delle quantità cognite nella lunghezza e nella larghezza, e l'altezza c, ed il residuo diviso per quattro si agguaglierà all'intercolunnio cercato; quando nella lunghezza due soli intercolunnj si pongono.

XVI. Ma collocando nella lunghezza quattro intercolunnj, onde essa si agguagli ad $a+4x$, per le cose dette dovrà adempiersi l'equazione $\frac{\overline{2a+4x}\cdot\overline{b+2x}}{a+b+6x} = c$, da cui fatti i necessarj computi si raccoglie la grandezza dell'intercolunnio $x = \frac{\sqrt{\overline{2a-4b+c}^2 + 8c^2} - 2a - 4b + 3c}{16}$. Quindi dal doppio $2a$ della quantità nota nella lunghezza si sottragga il quadruplo $4b$ della quantità nota nella larghezza, ed al residuo si aggiunga l'altezza c. Di questa somma $2a-4b+c$ si formi un quadrato, ed unito ad esso il quadrato c^2 moltiplicato per otto, si faccia l'estrazione della radice, dalla quale si levi la quantità $2a+4b-3c$, ed il restante diviso per 16 ci somministrerà il valore dell'intercolunnio x. Sia l'ordine corintio con piedestallo, all'arco medio non si ponga il serraglio, ed all'arco massimo si assegni il dritto di mod. 2. Non computando nella lunghezza e nella larghezza le mezze colonne negli angoli, perchè la volta della chiesa cade a piombo dal vivo della colonna da capo, i mentovati dati diverranno $a = 44$, $b = 22$, e supposto di un modulo il zoccolo sotto il piedestallo, $c = 42$. Sostituiti in cambio di a, b, c gli stabiliti valori, scopriremo $x = \frac{[illegible]}{16}$ $\frac{[illegible]}{4}$ $= \frac{70\frac{57}{814}}{16}$ $\frac{[illegible]}{4} = 4\frac{6\frac{57}{814}}{16}$. Chi comprendesse nella lunghezza, e nella larghezza le mezze colonne negli angoli, dovrebbe porre $a = 56$, $b = 24$, e troverebbe $x = 4\frac{5\frac{155}{154}}{16}$. Prendendo un medio fra i due rinvenuti valori, ne risulta $x = 4\frac{2}{3}$, misura, che esattamente si adatta allo scompartimento dei modiglioni nella cornice, e fa sì che [illegible] il

tempio

tempio acquisterebbe la bella proprietà, che il piano fra due archi medj pareggierebbe il vano di uno degli archi stessi, che è di moduli 10. ~~Seguita la circostanza che vedendosi con ciò ... intercolunnj ... medj ... parte secondaria~~, ~~e confusamente~~.

XVII. Conchiudo colle avvertire, che le regole stabilite pos=sono acquistare alle Architettura la qualità di scienza, poten=dosi col solo compasso, e senza disegno determinare alcune strutture, che non siano gran fatto composte; conforme ne ho fatto vedere un saggio nella chiesa di una sola nave. Dipendono queste dalle tre regole prima, seconda, e sesta, cioè a dire dalla similitudine degli archi, dalle altezza media armonica fra la lunghezza, e la larghezza, e dalla uguaglianza degli intercolunnj negli angoli, e fra gli archi medj, quando ci sono: le quali regole non ci lascia=no altro arbitrio che di qualche adequazione discreta, per accordare colle parti principali le secondarie, quali sono i triglifi, i modiglioni, i dentelli.

Spiegazione d'una Esperienza. Nella N. R. Calogeriana
Tomo XXI.

Spiegazione di una esperienza (*)
Tav. 1.

Alla tavola orizzontale ZU sia perpendicolare il braccio immobile GC della squadra GCD, che sostenga la bilancia AB, da cui pendano da una parte i pesi P, Q, il primo dei quali si agguagli al peso del vaso cilindrico MT, compreso anche il manubrio MCY, appeso dall'altra parte, ed il secondo al peso dell'acqua OT contenuta nel detto vaso. Al braccio GC sia raccomandata la squadra FHI, il di cui lato HI sia un cilindro solido. Quando i pesi P, Q stanno in equilibrio col vaso MT, e coll'acqua OT, la bilancia AB sia talmente bassa, che il cilindro HI non sia punto immerso nell'acqua. Si alzi poscia la detta bilancia, di modo che il cilindro HI penetri nell'acqua per lo spazio KI, e l'acqua in riguardo al vaso ascenda per lo spazio ON; l'esperienza c'insegna, che bisogna aggiungere ai pesi P, Q un nuovo peso R, acciocchè l'equilibrio sussista: si domanda la spiegazione di questo fenomeno, e la determinazione del peso R.

Prima che una porzione del cilindro HI sia immersa nell'acqua, si hanno di parte e di altra pesi uguali, che intanto fanno equilibrio, inquanto che l'uno e l'altro tenta di agire per uguali spazj. Ma dopo seguita l'immersione, il peso P+Q ascenda, e agisca per lo spazio ds, ed accadrà che il peso uguale del vaso MT, e dell'acqua in esso contenuta discenda, ed agisca per lo spazio ds, e che inoltre l'acqua, la cui altezza IK + IN = pN, con un suo moto particolare cali abbasso per uno spazietto dz da determinarsi, a cagione di riempiere il sito lasciato vuoto dal cilindro HI. Quindi seguendo più azione che reazione, acciocchè

(*) Nella N. R. Calogeriana Tomo XXI.

acciocchè non si rompa l'equilibrio, fa di uopo aggiungervi un nuovo peso R dalla parte di A, che esso equilibrio mantenga:

Per istabilire la misura del detto peso, sia dentro del vaso MT la base ST = b, la base del cilindro HI = c, l'altezza della porzione immersa nell'acqua, cioè KI = g: egli è chiaro che il volume dell'acqua scacciata di luogo sarà = cg, e che sendo questa salita ad occupare la zona, la cui altezza ON, e la base $b-c$, avremo l'equazione $ON \cdot \overline{b-c} = cg$, e perciò $ON = \frac{cg}{b-c}$. Si aggiunga l'altezza $IK = pO = g$, e ne risulterà $pN = \frac{cg}{b-c} + g = \frac{bg}{b-c}$. Il volume poi della zona Oq, che cinge il pezzo di cilindro KI, lo scorgiamo $= g \cdot \overline{b-c} = bg - cg$, e quindi il totale volume della zona acquea Nq pareggia la grandezza bg. Se la gravità specifica dell'acqua si esponga per n, il peso del volume bg contenuto nella detta zona Nq si agguaglierà ad nbg.

Cali abbasso il punto A della bilancia AB per lo spazio ds, onde sotto il cilindro HI resti il sito cds da essere riempiuto dall'acqua: cerco lo spazio dz, per cui dee discendere l'acqua della mentovata zona Nq, affine di occupare il predetto sito. Dovendo adempiersi l'equazione $\overline{b-c} \cdot dz = cds$, ci dà essa $dz = \frac{cds}{b-c}$. Mentre adunque il punto A discende per il tratto ds, il peso nbg dell'acqua componente la zona Nq esercita l'azione $nbg\,dz = \frac{nbgcds}{b-c}$, e conseguentemente per conservare l'equilibrio, bisogna applicare al punto A il terzo peso $R = \frac{nbgc}{b-c}$, il quale

conciossiachè

conciossiachè eseguirebbe la reazione $\frac{nbgc}{b-c}\cdot ds$, impedisca la pari azione $nbg\cdot\frac{cds}{b-c}$ dell'acqua bg. Si scoprirà esso uguale o al peso di un cilindro acqueo pari nella base $= c$ al cilindro HI; e nell'altezza $= \frac{bg}{b-c} = pN$ alla zona Ng; ovvero al peso di un cilindro della stessa materia, fornito della base $= b$, ch'è l'interna del vaso NT, e dell'altezza $ON = \frac{cg}{b-c}$.

Si ravvisa che sendo il peso dell'acqua contenuta nel vaso, cioè a dire $Q = nb.\,SO$, ed il peso $R = nb.\,ON$, i detti pesi si rispondono nella ragione di $SO : ON$. Ora giacchè sono conosciuti il peso Q, e l'altezza SO, misurando esattamente l'altezza ON, si determina con facilità il valore del peso $R = \frac{Q.\,ON}{SO}$.

Se la base c del cilindro HI sia minima, non si turberà l'equilibrio, richiedendosi per mantenerlo il peso inassegnabile $R = \frac{nbgc}{b-c}$.

Ma se la base c fosse infinitamente prossima alla b, di modo che $b-c$ pareggiasse una quantità infinitesima, non ci vorrebbe meno di un peso infinito $R = \frac{nbgc}{b-c}$ per conservar l'equilibrio. In questo caso l'altezza della zona Ng, cioè $pN = \frac{bg}{b-c}$ si scoprirebbe infinita, ed il peso nbg dell'acqua bg in essa contenuta eseguirebbe azione per lo spazio $dz = \frac{cds}{b-c}$ infinitamente maggiore di ds, la quale azione si esprime per $nbg.\,\frac{cds}{b-c}$. Perciò il peso R, che reagisce soltanto per lo spazio ds, bisogna che ascenda alla grandezza infinita $\frac{nbgc}{b-c}$, onde eseguisca la reazione $\frac{nbgc}{b-c}.\,ds$ uguale all'azione, che deve impedire,

pedire, dal peso nbg dell'acqua, che nella tante volte nominata zona capisca.

Spiegato il fenomeno, e stabilita la misura del peso R, aggiungo alcune importanti riflessioni. Due forze stanno in equilibrio, quando in tempo minimo pari tentano di esercitare azioni eguali, e contrarie. Anzi che una porzione del cilindro HI fosse immersa nell'acqua, la gravità del vaso MT, e dell'acqua OT si sforzava di effettuare la sola azione $\overline{P+Q}\cdot ds$, e perciò ad aver l'equilibrio, faceva di uopo sospendere dal punto A dalla bilancia AB il peso P+Q, che procurando di agire oppostamente per lo spazio ds, frastornasse la detta azione. Ma poichè il cilindro HI è penetrato in parte dentro dell'acqua, essendo accresciuta per la misura R ds l'azione da essa tentata, si rende necessario l'aggiungere ai due P, Q il terzo peso R, che aspirando di operare l'azione contraria R ds, l'equiponderanza mantenga.

Nella serie de' miei discorsi io mi sono servito della gravità dell'acqua, ch'è quella forza primitiva, la quale veramente procura di mettersi in azione. Avrei potuto per altro valermi di qualche forza derivata nascente dall'azione impedita dal peso dell'acqua. Benchè rimosso l'impedimento, la forza primitiva sia quella, ch'esercita azione, nulladimeno con un artifizio di metodo è concesso attribuire alla forza derivata l'azione, la quale per la natura di tali forze deve uguagliarsi a quella della forza primitiva, e può in cambio di essa adoprarsi.

~~[illegible]~~ di un cilindro

acqua #essendosi

~~[illegible] di altezza [illegible] $\frac{bq}{b-c}$, [illegible] dalla base [illegible]. Conseguentemente la detta base premerebbe ugualmente [illegible]~~ * se il punto B discendesse per lo spazio ds, il prodotto aumento di ~~questa~~ pressione effettuerebbe l'azione $\frac{nbqc \cdot ds}{b-c}$. Per impedirla adunque bisogna applicare ad A il peso $k = \frac{nbqc}{b-c}$, il quale (ascendendo il punto A per un eguale spazio ds) sarebbe costretto ad eseguire un'azione eguale, e contraria.

~~In caso~~ Essendosi l'acqua innalzata dentro del vaso per lo spazio $ON = \frac{cq}{b-c}$, la pressione del fondo $ST = b$ ha ricevuto l'aumento $\frac{ncq \cdot b}{b-c}$, a cui fa di uopo che si uguagli il peso k, se l'equiponderanza non ha da esser turbata. Ed in fatti se il punto B …

Nota
La continuazione si trova al segno *

Sostituito al MT un altro vaso egualmente pesante, fornito di un fondo eguale al ST, ma che si andasse stringendo dal fondo verso la bocca, di modo che una quantità d'acqua pari alla OT ascendesse ad un'altezza maggiore di SO, potrebbe a qualcuno cadere in pensiero, che la più grande pressione del fondo dovesse rompere l'equilibrio, e trarre in alto i pesi P, Q. Chi frattanto così giudicasse, si ingannerebbe a partito: Qualora per l'immersione del cilindro HI nell'acqua, si è essa alzata da O sino in N, il vaso MT è spinto abbasso da una forza maggiore di prima per la quantità $\frac{ncqb}{b-c}$, senza che si dia veruna forza contraria, che in alto lo spinga, e perciò è necessario l'aggiungere dalla parte di A il peso k. Non così succede nel vaso mentovato, che ha la bocca più piccola del fondo; imperciocchè la maggior pressione di questo viene com-

pensata

pensata da una forza, che sollecita il vaso all'insù, la quale nasce dalla pressione dell'acqua contro le pareti del vaso. Quindi esso vaso per ragione dell'acqua è stimolato all'ingiù dal solo peso dell'acqua stessa, e perciò fa equilibrio coi due pesi P, Q.

Per dimostrare la mia proposizione, considero il vaso mt (fig. 2.), la cui figura interiore venga generata dal giro intorno l'asse verticale gl della curva snm, le ordinate della quale decrescano da g verso l, e suppongo che l'acqua infusa giunga sino in k. Sia $ki = x$, $ih = dx$, $in = hq = y$, $qp = dy$, e la circonferenza circolare descritta col raggio $in = y$ si esprima per ay. La superficie del frusto conico nd si eguaglia ad $ay\sqrt{dx^2+dy^2}$, e giacchè la pressione da essa sostenuta, pareggia il peso di un volume d'acqua, che abbia per base la detta superficie, e per altezza $ik = x$, se ne rende manifesto il valore $= naxy\sqrt{dx^2+dy^2}$. Alla curva pn tirò la normale $nz = naxy\sqrt{dx^2+dy^2}$, e delineate poscia l'orizzontale nv, e la verticale zv, che si taglino nel punto v, osservo che la forza nz si risolve nelle due, nv che spinge orizzontalmente, vz che spinge verticalmente all'insù. Essendo retti gli angoli znp, vnq, sottratto il comune vnp, resta $znv = pnq$, ed i triangoli rettangoli nzv, npq hanno fra loro similitudine. Ci si presenta dunque l'analogia

$$np : pq :: nz : vz$$

$$\sqrt{dx^2+dy^2} : dy :: naxy\sqrt{dx^2+dy^2} : naxydy,$$

che mi dà $vz = naxydy$, e m'insegna essere la parete nfdp del vaso spinta in alto dalla forza $naxydy$. Si inferisca che l'aggregato di forze

$\int naxydy$

$\int naxydy$ stimola all'insù la porzione di vaso of. Fingasi che nel sito nf sia posto un fondo, il quale soffrirà la pressione $\frac{nay^2x}{2}$ uguale all'aja $\frac{ay^2}{2}$ di esso fondo moltiplicata nell'altezza x dell'acqua, e nella gravità specifica n di questo fluido. Da una tal forza, che spinge abbasso il vaso nf, si sottrà quella $\int naxydy$, che lo spinge in alto, ed il residuo $\frac{naxy^2}{2} - \int naxydy$ dinota la forza, colla quale veramente è stimolato all'ingiù dall'acqua, che in se contiene. La differenza della suddetta forza la troveremo uguale ad $\frac{nay^2dx}{2}$, e perciò nuovamente integrando si adempierà l'equazione $\frac{naxy^2}{2} - \int naxydy = \int \frac{nay^2dx}{2}$.

Ora facilmente determino il peso dell'acqua of. L'elemento di questo peso si uguaglia al frusto conico $nd = \frac{ay^2dx}{2}$ moltiplicato nella gravità specifica n dell'acqua, cioè a dire ad $\frac{nay^2dx}{2}$. Sommando per tutto cotale formola, sarà $\int \frac{nay^2dx}{2}$ uguale al peso dell'acqua of, al quale abbiamo trovato altresì pareggiarsi la forza, con cui mediante la pressione il detto fluido spinge il vaso all'ingiù. In qualunque altro posto, per esempio st, si collochi il fondo del vaso, giungeremo sempre alla medesima conclusione.

Ho dunque rettamente asserito, che la maggior pressione del fondo nel vaso mf viene compensata da una forza, che lo sollecita all'insù, traente l'origine dalla pressione dell'acqua contro le sue pareti; onde per cagione dell'acqua è stimolato all'ingiù dal solo peso dell'acqua stessa.

Un effetto analogo succederebbe anche

nel

nel vaso MT (fig. 1ª); se il cilindro HI in vece di essere immobilmente raccomandato alla squadra GZH, fosse connesso col vaso predetto. In ambe le ipotesi la base I del cilindro viene spinta all'insù da una forza uguale alla gravità specifica dell'acqua $= n$ moltiplicata nel prodotto di essa base $I = c$ nell'altezza dell'acqua sovrastante $= pN = \frac{bq}{b-c}$, di modo che le compete il valore $\frac{nbqc}{b-c}$ uguale a quello, per cui mercè l'alzamento QN dell'acqua cagionato dalla immersione di una porzione del cilindro, si è aumentata la pressione del fondo ST del vaso. Posto che il cilindro HI sia attaccato alla squadra GZH, la mentovata forza premente la sua base nulla ha che fare col vaso MT, e sta in equilibrio colla resistenza della squadra GZH. Ma se il cilindro è annesso col vaso, viene questo mediante il cilindro spinto all'insù dalla forza $\frac{nbqc}{b-c}$, la quale pareggiando l'incremento della pressione sostenuta dal fondo, addiviene che in riguardo all'acqua il vaso sia sollecitato all'ingiù unicamente dal peso dell'acqua medesima. In quest'ultima circostanza il peso P dovrebbe uguagliarsi a quello del vaso, del manubrio, e del cilindro, ed il peso Q a quello dell'acqua, e sussisterebbe l'equilibrio o stesse il cilindro tutto fuori dell'acqua, o una parte dentro la stessa se ne immergesse.

Della maniera di costruire un Portico
che ascende lungo un piano
inclinato all'Orizzonte.
Dissertazione
stampata nella N. R. Calogeriana
Tomo XXIII.

Della maniera di costruire un Portico, che ascenda lungo un piano inclinato all'orizzonte. (*)

Ritrovandomi in Castelfranco all'erudita conversazione del Sig.r Francesco Maria Preti; che [illegible] è noto al Mondo letterato sente molto avanti nell'Architettura civile, si tenne non breve discorso intorno alla maniera di costruire un Portico, che ascenda lungo un piano inclinato all'orizzonte. Tra i varj pareri, che furono messi ad esame, proposi anche il mio, e sostenni che i basamenti, le imposte, il sopraornato, le basi, ed i capitelli delle colonne, quando queste vi siano, debbono delinearsi paralleli al piano inclinato. Restava da determinare l'artificio di costruire le curvature degli archi, le quali debbono insistere perpendicolarmente sopra le pile, ed essere da queste toccate, e di più avere la proprietà, che la tangente condotta al loro sommo vertice sia parallela al piano inclinato. Ora io servendomi di due equazioni di circolo sviluppo il problema nel modo seguente.

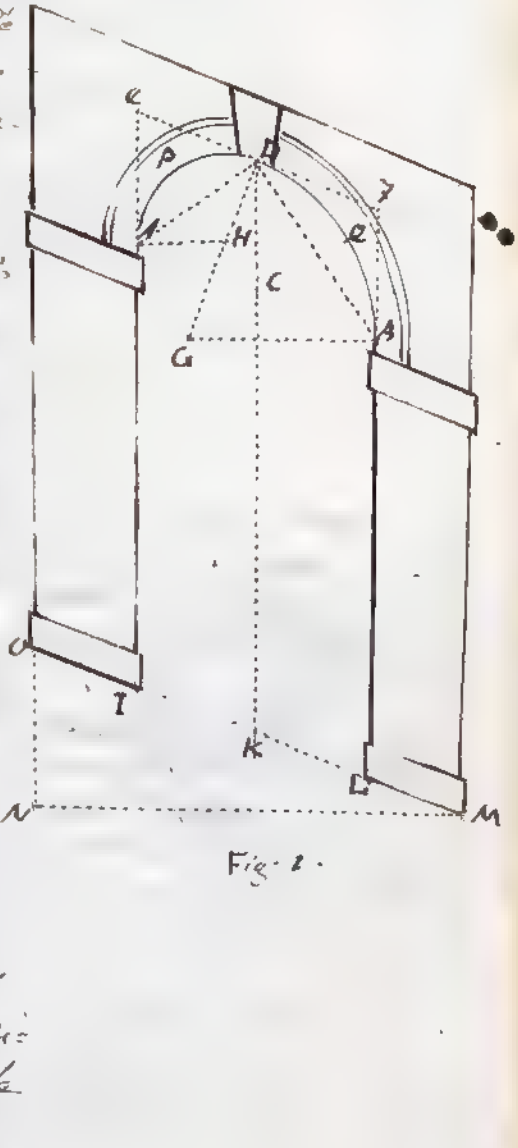


Fig. 1.

Il piano inclinato OM (Fig. 1) forma l'angolo OMN colla linea orizzontale MN. Avverto che il comodo della salita e della discesa richiede, che la retta ON verticale, non sia una maggiore della quinta parte della corrispondente orizzontale NM. Sopra il detto piano inclinato si voglia costruire l'arco IADBL. La larghezza IL dell'arco per la direzione del piano inclinato venga divisa per metà dal punto K, e sopra i punti I, K ed L si alzino le verticali Ie, KD, L7, che pareggino l'altezza dell'arco, e per i punti e, D, 7 si passi la retta e7 parallela ad IL.

(*) Nella N. R. Calogeriana Tomo XXIII.

Si

Si tagli DC = IK = KL, e pel punto C si conduca ACB parallela ad IZ. Ho detto che l'arco ADQB deve avere la proprietà, che la linea CZ parallela al poco richiamato lo tocchi nel punto medio D, e che incontri perpendicolarmente sopra le rette IA, LB, dimodochè le linee IC, LZ siano tangenti del nostro arco nei punti A, B. Per ottenere l'intento conduco DG perpendicolare ad CZ, la quale venga tagliata nel punto H dalla retta AH normale ad IC, e nel punto G dalla retta BG normale ad LZ. Detto che mi riesca di dimostrare HA = HD, GB = GD, ne segue, che la porzione di circolo APD descritta col raggio HA tocchi nei punti A, D le linee IC, CZ, e che la porzione di circolo BQD descritta col raggio GB tocchi nei punti B, D le linee LZ, CZ. Si uniscano le corde AD, DB.

Gli angoli retti HAI, HDI sono eguali; ma per le parallele AB, CZ; CI, IL si agguagliano anche gli angoli CAI, CDI; dunque passa eguaglianza tra gli angoli HAC, HDC. E poichè nel triangolo isoscele ACD sono eguali gli angoli alla base HAD; HD. Aggiungendo agli eguali HAC, HDC CAD, CDA, detratti gli eguali HAC, HDC, rimangono eguali gli angoli residui HAD, HDA, e per conseguenza si agguagliano i lati HA, HD; il che &c.

Collo stesso metodo proverò eguali gli angoli GBZ, GZB, i quali aggiunti agli angoli parimente eguali CBD, CZB compongono gli angoli GBZ GDB, tra cui conseguentemente passa eguaglianza, e quindi ancora tra i lati GB, GD, come doveva dimostrarsi.

Gli angoli retti HAC, HDC sono eguali; ma si agguagliano altresì gli angoli CAD, CDA nel triangolo isoscele ACD; dunque detrattone li dai retti HAC, HDC, rimangono eguali gli angoli residui HAD, HDA, e per conseguenza passa eguaglianza fra i lati HA, HD; il che &c.

Collo stesso metodo proverò eguali gli angoli GBD, GDB, e perciò ancora i lati GB, GD.

Alcune pertinenze dei nostri Architetti voglio-

no

no delinearsi in una maniera analoga a quella, che ho descritta in riguardo alla curvatura degli archi stessi, le quali si possono chiamare ellittiche. Vengono ad uso i mentovati archi per formare dei portici, che ascendono ad un qualche Santuario fabbricato in cima delle di una collina, conforme in Bologna, ed in Vicenza [illegible]. In questi portici gli archi da una parte si fanno aperti, e dall'altra chiusi. Si giudica espediente nelle altezze degli archi chiusi l'aprire delle finestre rotonde, che occhi soglion chiamarsi. Dovendo essere i due diametri dell'occhio uno verticale, e l'altro parallelo al piano inclinato, e dovendo l'occhio suddetto toccare l'altezza del arco nel suo punto medio, e per conseguenza una linea parallela al mentovato piano, che passa per esso punto, la sua descrizione è affatto simile a quella della ellisse dell'arco, conforme la fig.ra 2 metterà in chiaro. Siano CD,
+ RS i due diametri dell'occhio, l'uno verticale, e l'altro parallelo ad AB. Si conducano DT normale ad GZ, CV normale ad AB, RV, ed ST normali a CD, ed X, V, Z, T saranno i centri, coi quali dovranno descriversi le porzioni di circolo DR, RC, CS, SD, che formeranno l'occhio DRCSD.

I fianchi dei basamenti, delle imposte, e dei serragli degli archi, di cui si tratta, i fianchi delle basi, e dei capitelli delle colonna, dell'architrave, e della cornice &c. richiedono di essere disegnati ponendo in opera la descritta avvertenza. Mi ristringerò a porre sotto gli occhi di chi legga una base toscana adattata ad un piano inclinato.

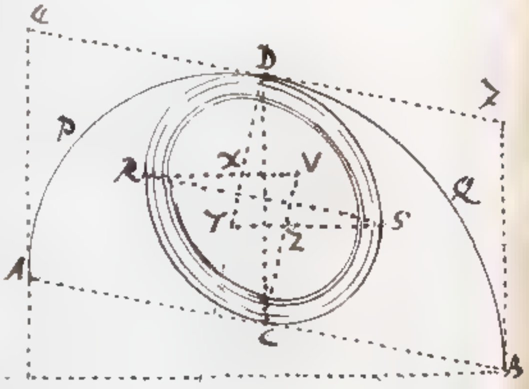


Fig. 2.

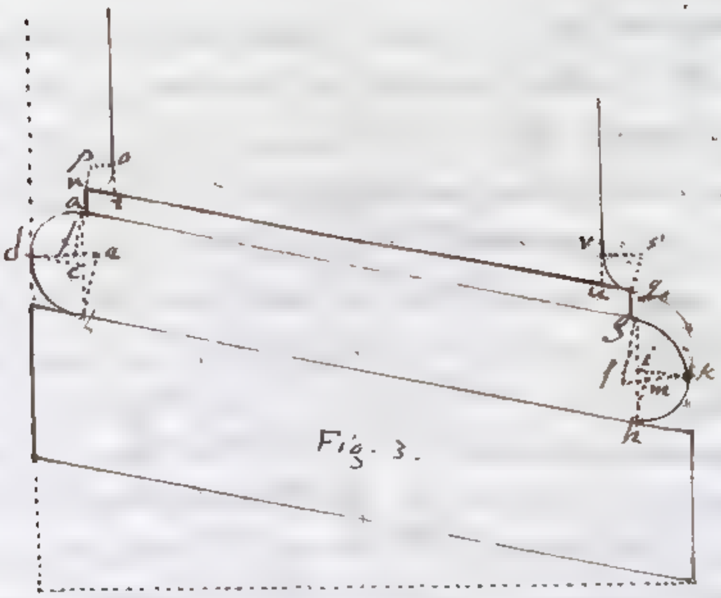


Fig. 3.

Lo scompartimento di questa base l'ho preso dallo Scamozzi. Sia ab (fig. 3.) il diametro verticale del toro, dc il semidiametro paral=lelo al piano inclinato: Dal punto d meno la orizzontale, e pei punti a, b conduco le rette af, bc normali ad ag, bh parallele al detto piano, ad f, e saranno i centri, coi quali si dovranno descrivere le porzioni di circolo ad, db. Con simile artificio si determineranno i centri l, m delle porzioni di circolo gk, kh.

Per delineare le imoscapo, e retta infe=riore della colonna, segno to = nt, e tirate op, np normali a to, nt, il loro punto di intersezione p sarà il centro del segmento di circolo no. Non altrimenti fatta uv = uq, e condotte vs normale ad uv, e qs normale ad uq, si taglieranno esse nel punto s centro del segmento di circolo qv.

mala – copia

Delle figure piane isoperimetre contenenti la massima superficie.

Nella N. R. Calogeriana Tomo XXIII.

Delle figure piane isoperimetre contenenti la massima superficie.

Dissertazione del Co. Giordano Riccati.

Comunicato il metodo di determinare le figure piane isoperimetre, che comprendono la massima superficie, ~~mi è sembrato~~ caduto(mi) non ha molto in pensiero mi ha sembrato assai semplice, ho presa risoluzione di comunicarlo al Pubblico, a cui spetterà il giudicio se possa meritare alcun pregio.

Teorema I.

Tra tutti i triangoli isoperimetri, che hanno comune un lato, l'isoscele contiene la massima superficie, e quanto più gli altri triangoli si accostano all'isoscele, tanto maggior aja comprendono.

Ci siano varj triangoli isoperimetri ACB, ADB, AeB (fig. 1), che abbiano il lato comune AB, dico che l'isoscele ACB contiene la massima superficie, e che il triangolo ADB è maggiore dell'AeB. Dai vertici C, D, e dei detti triangoli si tirino alla linea AH le normali C7, DG, eH. I predetti vertici stanno in una elisse CDe, i cui fochi A, B, l'asse maggiore = ACB, ed il minore = 7C, della qual elisse sono ordinate le linee 7C, GD, He &c. Tra queste la più grande è l'asse minore 7C, e l'altre GD, He vanno diventando a grado a grado più piccole, quanto i triangoli ADB, AeB hanno i lati più disuguali, e maggiormente si allontanano dall'isoscele ACB. Ma le aje di più triangoli, che hanno comune la base, stanno come le loro altezze 7C, GD, He &c. ~~normali~~; dunque il triangolo isoscele ACB è il massimo, e l'ADB > AeB, il che &c.

fig: 1

Teorema II.

Fra tutti i triangoli isoperimetri il massimo è l'equilatero, e gli altri sono tanto più grandi quanto più ad esso si accostano.

Fig. a

Abbiasi (Fig. a) il triangolo ABC isoscele, la cui base AB resti per esempio superata da ognuno dei lati AC, BC per la differenza n, di modo che sia $AC = BC = AB + n$. Si prenda per base il lato BC, e se il triangolo BCA si trasformerà nell'isoscele isoperimetro BCD, converrà questo pel Teorema I. aver aja maggiore del BCA, ed essendo $AB + AC = 2AB + n$, ne risulterà $BD = CD = AB + \frac{1}{2}n$, e i lati ineguali $BC = AB + n$, $CD = AB + \frac{1}{2}n$ non differiranno salvochè per $\frac{1}{2}n$, ed il triangolo BCD, che è maggiore dell'ABC, o BCA, meno si allontana dall'equilatero. Assumo ora come base il lato CD, e cangio il triangolo CDB nell'isoscele isoperimetro CDa, il quale ~~la cui superficie~~ pel Teorema I. chiuderà una superficie ~~sarà~~ più grande di quella del CDB, ~~ed a~~ ~~esso~~ si avvicinerà più all'equilatero. ~~Il triangolo BCD~~ imperciocchè $CB = AB + n$, $DB = AB + \frac{1}{2}n$; dunque $CB + DB = 2AB + \frac{3}{2}n$, e $\frac{CB + DB}{2} = Ca = AB + \frac{3}{4}n$. Quindi la differenza fra i lati ineguali $CD = AB + \frac{1}{2}n$, $Ca = AB + \frac{3}{4}n$ si troverà ridotta ad $\frac{1}{4}n$, cioè a dire minore di quella dei lati BC, CD, che si è determinata eguale ad $\frac{1}{2}n$. Continuando l'operazione le aje dei nuovi triangoli anderanno sempre crescendo, ed i loro lati ineguali meno si allontaneranno dalla eguaglianza, venendo espresse le differenze ~~successive~~ cominciando dal triangolo ABC dalla progressione n, $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{4}n$, $\frac{1}{8}n$ &c. Finalmente

dopo

Dopo un giro infinito svaniranno le differenze, e l'aja del triangolo divenuto equilatero non potrà più crescere, e sarà al massimo pervenuta. Egli è pertanto manifesto, che fra tutti i triangoli isoperimetri il massimo è l'equilatero, e gli altri sono tanto più grandi, quanto più ad esso si accostano; il che &c.

Teorema III.

Fra tutti i quadrilateri isoperimetri, che hanno comune un lato, che fa figura di base, quello che ha gli altri tre lati uguali, e gli angoli alla base uguali, comprende la massima superficie.

Fig. 3

Diansi varj quadrilateri aventi la base comune AB (fig. 3), uno de' quali sia ABCD; dico che quello che avrà i lati BC, CD, DA uguali, ed inoltre uguali gli angoli alla base A, B, e per conseguenza ancora gli altri C, D, di modo che intorno ad esso si possa delineare un circolo, chiuderà la massima superficie. In fatti se i lati AD, DC non sono eguali, si tiri la linea AC, sopra di cui si formi il triangolo isoscele AQC isoperimetro all'ADC, e contenendo quello maggior aja di questo pel Teorema I., il quadrilatero AQCB sarà più grande dell'isoperimetro ADCB. Di nuovo posto che i lati QC, BC non si eguaglino, sopra la linea QB costruisca il triangolo isoscele QZB isoperimetro all'QCB, ed essendo il triangolo QZB maggiore dell'QCB pel citato Teorema I, ne risulta il quadrilatero AQZB maggiore dell'AQCB, e molto più dell'ADCB. Con questo metodo crescerà il quadrilatero ~~sintantochè i suoi tre lati siano divenuti eguali~~ in cui la base AB è costante, secondo che gli altri tre lati, dai quali è somma è data, più si accosteranno alla uguaglianza, ed in riguardo ai lati stessi giungerà al massimo allora che siano ridotti perfettamente uguali.

Ma

Ma acciocchè divenga assolutamente massimo, egli è d'uopo altresì, che si agguaglino gli angoli alla base A, B. Adempiansi tali circostanze nel quadrilatero ABCD (fig. 4.) dico contenere esso la massima superficie. E voglia il vero, passi egli alla positura ABEF, descrivendo i punti C, D gli archi (che si consumino in ...) CE, DF. Si tirino le corde CE, FDK, e fatte GH = GE, GI = GD, si descrivano le linee EH, DI. L'angolo ADK è maggiore del retto, siccome quello che unito all'angolo ADF minore di un retto compie due retti: ma l'angolo BCE è minore di un retto; dunque sottraendo i predetti angoli dagli uguali ADC, BCD, resta l'angolo KDC < ECD. Ora l'angolo DFI è minore del KDC; dunque tanto più sarà DFI < ECH. Poichè CD = EF, levate le linee uguali GH, GE; GD, GI, rimane CH = FI. Nei triangoli isosceli simili GHE, GID gli angoli GHE, GID si agguagliano, e per conseguenza sono parimenti uguali i loro complementi a due retti CHE, FID. Quindi avendo dimostrato DFI < ECH, ne segue dover essere DI < EH, FD < CE. Seguiremo pertanto il triangolo ADF < BCE, FDI < CEH, GDI < GEH, e però ADGFA < BCGEB: ma il quadrilatero ABEF cresce sopra il quadrilatero ABCD per l'aja ADGFA, e cala per la BCGEB; dunque essendo l'incremento minore del decremento, si conchiude essere ABEF < ABCD; il che ec.

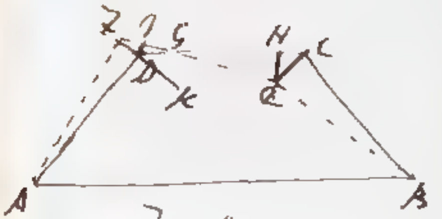


Fig. 4.

Teorema IV.

Fra tutte le figure quadrilatere isoperimetre il quadrato contiene la massima superficie.

Ci sia proposto il quadrilatero ABCD (fig. 5.), e se non è AB = BC, AD = DC, si tiri la linea AC, e sopra la stessa si

costruiscano

costruiscano i triangoli isosceli, AQC isoperimetro ad ABC, AZC isoperimetro ad ADC. Concossiachè per Teorema I. AQC > ABC, AZC > ADC, sarà il quadrilatero AQCZ maggiore dello ABCD. ~~Siano ineguali i lati~~. Si osservi che sendo AQ = CQ, AZ = CZ, avremo parimente AQ + AZ = CQ + CZ, e per conseguenza $\frac{AQ+AZ}{2} = \frac{CQ+CZ}{2}$. Siano ineguali i lati AQ, AZ; CQ, CZ, e condotta la retta QZ, sopra di essa considerata siccome base si formino i triangoli isosceli QGZ isoperimetro allo QCZ, QHZ isoperimetro allo QAZ. Ci insegna il Teorema I. essere QGZ > QCZ, QHZ > QAZ, e quindi il quadrilatero QGZHQ si scoprirà maggiore dello QCZAQ, e molto più dello ABCDA. Per la costruzione $QG = GZ = \frac{CQ+CZ}{2}$, $QH = HZ = \frac{AQ+AZ}{2}$: ma conforme ho notato $\frac{AQ+AZ}{2} = \frac{CQ+CZ}{2}$; dunque $QG = GZ = QH = HZ$, ed il quadrilatero QGZHQ ha tutti i quattro lati eguali, ed è un rombo, il quale in riguardo alli elementi dei lati non può maggiormente crescere di superficie.

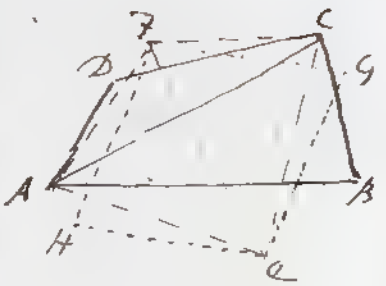


Fig. 5.

Può bene pertanto divenir l'aja maggiore per motivo degli angoli. Ed infatti (fig. 6) l'aja del rombo ABCD eguagliando la base AB moltiplicata nell'altezza normale CQ, la quale è sempre minore del lato BC = AB, quando l'angolo CBQ non è retto, e solamente nel caso del detto angolo pari ad un retto diviene eguale a BC, onde il rombo si trasforma in un quadrato, e la sua superficie ascende al massimo valore AB · BC; il che &c.

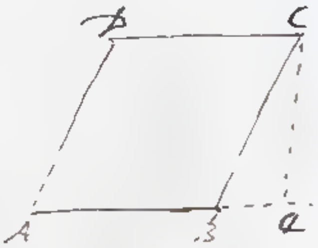


Fig. 6.

La verità, che, tra tutti i ~~figure quadri~~= ~~latere~~ rombi

Fig. 7

rombi
~~Lati~~ isoperimetri il quadrato chiuda la massima superficie, si può anche dimostrare agevolmente nel seguente maniera. I lati (fig. 7) BC, AD del quadrato ABCD si girino intorno i punti B, A, e descrivano gli archi eguali CE, DZ; egli è chiaro che condotta la linea ZE, che si continui sino in G, ABEZ sarà un rombo. Il detto rombo, ed il rettangolo ABGH sono eguali perchè hanno la base comune AB, e stanno dentro le stesse parallele AB, ZG: ma il rettangolo ABGH manca dal quadrato ABCD pel rettangolo HGCD. Dunque tale è altresì la differenza fra il rombo ABEZ, ed il mentovato quadrato, la quale sarà tanto maggiore, quanto l'angolo EBA anderà divenendo più acuto; il che ecc.

Corollario.

Fra i parallelogrammi isoperimetri, nei quali i lati disuguali sien dati, il rettangolo comprende la massima superficie.

Teorema V.

Fra tutti i poligoni isoperimetri di un dato numero di lati quello, ch'è fornito di lati, e di angoli eguali, si aja più grande racchiuda.

Fig. 8

Nel poligono ABCDE (fig. 8) i due lati vicini AB, AE siano ineguali. Tirata la linea EB, descrivo il triangolo isoscele EBZ isoperimetro allo EBA, e ne risulta il poligono ZBCDE maggiore dello isoperimetro ABCDE pel Teorema I. Si usi lo stesso artifizio relativamente a qualunque altra coppia di lati ineguali contigui, ed i nuovi poligoni anderanno sempre crescendo d'aja, e questo accrescimento continuerà

continuerà finchè tutti i lati siano ridotti eguali: il che adempiuto, il poligono per cagione dei lati non può ricevere nuovo aumento.

Restano da considerarsi gli angoli; i quali se saranno eguali, onde intorno si possa descrivere un circolo intorno al poligono, conserverà questo la massima superficie. Che se qualcuno rimane, che si aja massima si potrà muovere colla disuguaglianza degli angoli, suppongansi ineguali gli angoli C, D, e si descriva la linea eB. Se è massimo il poligono ABCDe, deve esser tale anche il quadrilatero eBCD: ma questo non è massimo pel Teorema III. quando non si eguaglino gli angoli C, D; dunque questa proprietà non compete nemmeno al poligono ABCDe contenente due o più angoli diseguali; il che &c.

Teorema VI.

Tra due poligoni regolari isoperimetri quello di maggior numero di lati comprende aja maggiore.

Dividansi questi due poligoni in tanti triangoli eguali, che hanno per base il lato del poligono, ed il loro apice nel centro del poligono stesso. Gli angoli opposti alla basi di due triangoli a due poligoni appartenenti, e le basi medesime stanno inversamente come i numeri dei lati. Sia ACB (fig. 9) un triangolo del poligono di minor numero di lati, alla cui base AB dal vertice C si tiri la normale CD, che dividerà la detta base in due parti eguali AD, DB. Si faccia DCe eguale al semiangolo centrale dell'altro poligono, ed indi gli angoli DCe, eCA dividansi in parti fra loro eguali, dimodochè sia per esempio eCA eguale alla terza parte di

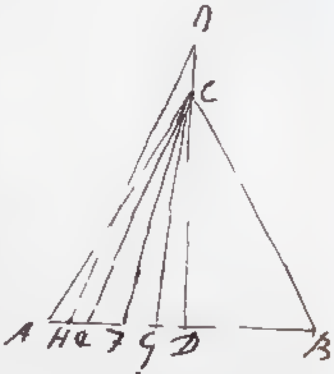


Fig. 9.

DCA

DC, e ne risultino gli angoli DCG, GCF, FCa uguali all'angolo aCA. Siccome superano il dimostrare FG > GD, aF > FG, Aa > aF. Quindi AD : aD si ritroverà in maggior proporzione di ACD : aCD, e perciò dovendo stare i semilati AD, HD dei due poligoni reciprocamente come il numero dei lati, o come gli angoli ACD, aCD; il punto H cadrà fra i punti A, a. Descritta pertanto HI parallela ad aC, onde si uguaglino gli angoli HID, aCD, sarà HID sarà il semiangolo del poligono di maggior numero di lati, e la normale DI si manifesterà maggiore della DC. Si osservi che supponendosi isoperimetri i due poligoni, le loro superficie si corrispondono nella proporzione delle dette normali, e si conchiude, che il poligono di maggior numero di lati chiude una superficie più grande; il che &c.

Teorema VII.

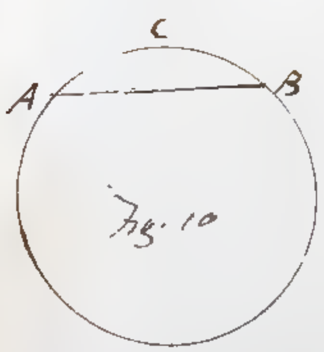
Il circolo fra tutte le figure isoperimetre comprende la massima superficie.

Il circolo si adegua con un poligono regolare di lati, il cui numero ascende ad un infinito trascendente; dunque pel Teorema VI. contiene aja maggiore di quella, che in qualsivoglia figura isoperimetra si ritrova.

Corollario I.

Qualunque curva, che ritorni in se stessa, isoperimetra al circolo contiene minor superficie; imperocchè sebbene si può considerare come un poligono di infiniti lati uguali, questo poligono non è equiangolo.

Corollario II.



Se fra tutte le figure isoperimetre il cerchio comprende l'aja maggiore, questa proprietà conviene anche alla figura ABCA (Fig. 10.) formata dalla corda AB, e dalla porzione

porzione di circolo ACB. Dunque qualsivoglia figura traversa abca composta dalla corda ab = AB e dalla curva, o dall'aggregato di linee rette acb = ACB rinchiuderà un'aja minore.

Teorema VIII.

Fra tutti i poligoni formati cogli stessi lati, quello, intorno a cui si può circoscrivere un circolo contiene maggior superficie.

Il poligono ABCD (fig. 11.) si trovi in posizione tale, che intorno ad esso si possa descrivere il circolo AeBfCGDHA; dico che comprenderà la massima superficie. Si giri il lato BC intorno il punto B, di modo che il poligono prenda la figura abcd, movendosi insieme coi lati le porzioni di aja circolare loro corrispondenti bfc, cgd, dha, aeb. La figura aebfcgdha non è più un circolo, e per conseguenza, pel Teorema VII, chiude minor superficie della figura circolare isoperimetra AeBf CGDHA. Si levino da una parte, e dall'altra le aje uguali bfc = BfC, cgd = CGD, dha = DHA, aeb = AeB, e resterà il poligono abcd < ABCD; il che &c.

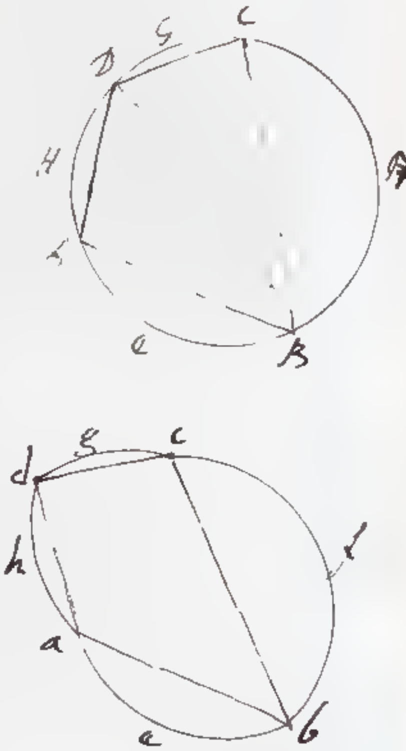


Fig. 11.

Osservazioni
sopra la Necessità della Leggi
Dinamiche.

Si legga questa Dissertazione nel T. XXV. Opuscolo VI. della Nuova Raccolta di Opuscoli Scientifici, e Filologici. In Venezia, MDCCLXXIII. Presso Simone Occhi.

Osservazioni sopra la Necessità delle Leggi Dinamiche

del Signor Conte Giordano Riccati.

1. I canoni della risoluzione, e della composizione dei moti dipendono immediatamente dalla idea della velocità, e perciò debbono indispensabilmente verificarsi in qualunque sistema. Abbiasi il rettangolo ABCD (Fig. 1.), per la cui diagonale AC si concepisca spinto un corpo con tal velocità equabile, che nel tempo dato t scorra lo spazio AC. Essendo la velocità una relazione fra lo spazio scorso, ed il tempo impiegato a percorrerlo, e stando essa direttamente come lo spazio, ed inversamente come il tempo, si esprime per lo spazio diviso pel tempo. Se la velocità è costante, gli spazj passati serbano la ragione dei tempi, nei quali si passano; e quindi l'equabile velocità si eguaglia ad uno spazio diviso pel tempo, che si spende a passarlo. Qualora la velocità sia variabile, si può adequatamente considerare come costante per un tempo minimo, e determinarne la misura uguale ad uno spazietto inassegnabile diviso pel tempicello, che si consuma a percorrerlo. Supponendosi adunque costante la velocità per AC, si eguaglierà ad $\frac{AC}{t}$. Nel tempo, in cui il mobile si trasferisce da A in C, egli è certo che si discosta dalla linea AB per lo spazio AD, dalla linea AD per lo spazio AB = DC. La mentovate velocità di allontanamento siccome equabili si contrassegnano per $\frac{AD}{t}$, per $\frac{DC}{t}$, e per conseguenza può rettamente supporsi, che la velocità $\frac{AC}{t}$ per la direzione AC comprenda in se stessa le due $\frac{AD}{t}$, $\frac{DC}{t}$ per le direzioni AD, DC, e possa in esse risolversi. Ho detto che le velocità di allontanamento dalle linee AB, AD sono equabili. Eccone il vero; sia il corpo nel punto E, e viaggi per lo spazio minimo EF nel tempo dt: pe' punti E, F si tirino le rette EG, FG parallele alle AD, CD. Nel mentre che il mobile scorre lo spazio EF, si discosta dalle linee AB, AD per gli spazj EG, GF colle velocità di recesso $\frac{EG}{dt}$, $\frac{GF}{dt}$. Giacchè è costante la velocità per AC, gli spazj serberanno la ragione de' tempi, nei quali si passano; e perciò

ci

ci si presenterà l'analogia $AC : eZ :: t : dt$; ma per la similitudine dei triangoli ACD, eZG, $AC : eZ :: AD : eG :: DC : GZ$; dunque $AD : eG :: DC : GZ :: t : dt$, e conseguentemente $\frac{AD}{t} = \frac{eG}{dt}$, $\frac{DC}{t} = \frac{GZ}{dt}$, formole dalle quali impariamo, che in qualunque punto e la velocità $\frac{AC}{t}$ per la diagonale AC si risolve nelle due $\frac{AD}{t}$, $\frac{DC}{t}$ per i lati AD, DC del rettangolo $ABCD$ fornite sempre dei mentovati valori costanti. La velocità per AC è quella, di cui veramente è fornito il corpo; e quantunque le velocità per AD, AB meritino il nome di immaginate, si attribuiscono con verità al corpo, essendo innegabile, che con esse il corpo si discosta dalle linee AB, AD.

II. Spiegata la risoluzione delle velocità, è facilissimo a mettere in chiaro la composizione. Il corpo A collocato dentro una nave, che viaggia per la direzione AD, cammini dentro essa nave per la direzione AB, e le due velocità equabili siano atte a scorrere nel medesimo tempo t gli spazj AD, AB. Per la natura del moto equabile in qualsivoglia porzione qt del tempo t si passeranno spazj per le direzioni AD, AB proporzionali alle linee AD, AB, ed uguali a qAD, qAB. Da ciò ne nasce per necessaria conseguenza, che il mobile ha da camminare per la diagonale AC con una velocità $\frac{AC}{t}$ proporzionata ad essa diagonale, la qual velocità si compone delle due $\frac{AD}{t}$, $\frac{AB}{t}$. Su questo punto, il quale altro non è che un corollario della risoluzione delle velocità, non istimo necessario di spendere molte parole, aggiungendo solo la riflessione, che la velocità per AC è la vera e reale del corpo, e che le due per AD, AB richiedono il titolo d'immaginate. Nulladimeno sono dotate anche esse di qualche realtà, movendosi la nave per la direzione AD, e trasportando seco il corpo, ed applicandosi questo a tutti i punti della linea AB segnata nel pavimento della nave.

Ho considerato il solo caso, che le velocità componenti, e risolte formino angolo retto, non perchè la dottrina non si estenda generalmente a qualunque angolo, ma perchè non mi bisognava di più per la cosa, che son per dire.

III.

III. L'azione delle forze continuamente applicate è il principale fondamento della Dinamica. Quantunque una forza sia variabile, non pertanto agisce costantemente per un minimo spazio; e quindi ne segue, che dal canone, il quale dà regola alle azioni delle forze costanti, dipendono necessariamente quelli delle azioni delle forze variabili. Se adunque le formole, onde prendono norma le azioni delle forze costanti, si dimostreranno necessarie, ciò sarà generalmente provato delle formole tutte esprimenti le azioni delle forze, che con qualsivoglia legge si variano.

IV. In una massa quieta imprima moto l'azione d'una forza costante, e necessariamente interverrà; che lo spazio, a cui agendo s'applica la forza, s'agguagli ad una tale funzione della velocità cagionata nel corpo, che posto lo spazio, e conseguentemente anche l'azione uguale a nulla, sia parimente nulla la velocità. La mentovata funzione può pareggiarsi o ad una potestà semplice della velocità moltiplicata per una costante, o ad un aggregato di potestà similmente per costanti moltiplicate, o pure ad una grandezza, in cui abbiano luogo e divisori, e radicali di quantità complesse. Tutti questi tre casi anderò ordinatamente considerando.

V. Si chiami s lo spazio, a cui si applica la forza costante, e u la velocità cagionata nel corpo, e sia $s = Au^n$ (1.) A è un coefficiente dato, il cui valore dipende, come vedremo, da quello della massa del corpo divisa per la forza costante, ed n una quantità indeterminata da determinarsi poi nel progresso delle operazioni. Da questa formola, che ci mette sotto gli occhi il primo caso, si deducono le seguenti.

Esprima t il tempo, durante il quale la forza ha esercitata la sua azione, e qualora u sia quella velocità, ond'è fornito il mobile per la direzione della forza, avremo a norma di ciò che abbiamo detto al numero primo $\frac{ds}{dt} = u$; o sia $ds = udt$: ma dal differenziare la formola (1.) ne nasce $ds = nAu^{n-1}du$; dunque $udt = nAu^{n-1}du$, ovvero $dt = nAu^{n-2}du$, ed integrando $t = \frac{nA}{n-1}\cdot u^{n-1}$ (2.). Non si aggiunga costante, perchè quando $t = 0$, è

è parimente nulla l'azione, e conseguentemente ancora la [illegible] velocità. [illegible]

Giacchè $s = Au^n$, ne risulta $\frac{s^{\frac{1}{n}}}{A^{\frac{1}{n}}} = u$, ed $\frac{s^{\frac{n-1}{n}}}{A^{\frac{n-1}{n}}} = u^{n-1}$. Sostituisco nella formola (2.) in cambio di u^{n-1} il ritrovato valore, e mi si presenta $t = \frac{nA}{n-1} \cdot \frac{s^{\frac{n-1}{n}}}{A^{\frac{n-1}{n}}}$, o pure dopo le debite riduzioni $t = \frac{nA^{\frac{1}{n}}}{n-1} \cdot s^{\frac{n-1}{n}}$ (3.)

Moltiplicando questa ultima formola coll'altra $u = \frac{s^{\frac{1}{n}}}{A^{\frac{1}{n}}}$, ne proviene $ut = \frac{ns}{n-1}$ (4.). Si avverta, che la grandezza ut dinota lo spazio, che si percorre colla velocità equabile u nel tempo t, il quale spazio per conseguenza si agguaglia ad $\frac{ns}{n-1}$.

VI All'asse AI (Fig. 2.) immaginiamoci descritta la curva ACH corrispondente all'equazione (3.) $t = \frac{nA^{\frac{1}{n}}}{n-1} \cdot s^{\frac{n-1}{n}}$, le cui assisse AB dinotino gli spazj, per cui la forza ha esercitata l'azione, e le ordinate BC i tempi della durazione dell'azione medesima. Al punto C della curva si tiri la tangente Ce, la quale tagliando l'asse nel punto e, determinerà la suttangente Be, il cui valore si esprime per $\frac{t\,ds}{dt}$. Differenziando l'equazione (3.) scopriremo $dt = A^{\frac{1}{n}} s^{-\frac{1}{n}} ds$. Sostituiti i valori di t, e di dt nella formola $Be = \frac{t\,ds}{dt}$, troveremo $Be = \frac{ns}{n-1}$; ma $\frac{ns}{n-1}$ è quello spazio, che colla velocità equabile u si passa nel tempo t; dunque il detto spazio si agguaglia sempre alla suttangente di quella curva, le cui assisse dinotano gli spazj scorsi con velocità variabile, e le ordinate i tempi spesi a scorrere gli spazj mentovati.

VII In quell'istante, in cui nel punto A comincia l'azione della forza costante per la direzione AI, sia fornito il mobile A per la direzione A7 normale ad AI della velocità equabile = 1. Essendo la velocità equabile uguale allo spazio scorso diviso pel tempo, in cui si scorre, posta la velocità uguale all'unità, ne risulta lo spazio eguale al tempo. Quindi se colla velocità crescente cagionata dall'azione della forza costante, le cui direzioni si conservino sempre parallele, il corpo passa lo spazio AB = s nel tempo BC = t; nello stesso tempo colla velocità costante 1 scorrerà lo spazio BC, e per la dottrina dei moti composti si troverà sempre nella curva ACH.

La

La sua velocità $= U$ si comporrà dalla variabile $u = \frac{s^{\frac{1}{n}}}{A^{\frac{1}{n}}}$, e della costante z, e poichè le due direzioni AI, A7 formano un angolo retto, si agguaglierà a $\sqrt{\frac{s^{\frac{2}{n}}}{A^{\frac{2}{n}}} + zz}$ (s).

VIII. La stessa verità si può scoprire per altra strada: imperciocchè sendo $EA = \frac{ns}{n-1}$, $BC = t = \frac{nA^{\frac{1}{n}} s^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}$ gli spazj, che nello stesso tempo t si scorrono colle velocità equabili u, z; i mentovati spazj stanno come le corrispondenti velocità. Quindi per le regole dei moti composti il corpo nel sito C camminerà per la direzione della diagonale EC, che come abbiamo veduto tocca la curva ACH nel detto punto C, con una velocità proporzionale ad essa tangente. Instituita dunque l'analogia $BC = \frac{nA^{\frac{1}{n}} s^{\frac{n-1}{n}}}{n-1} : EC = \frac{n}{n-1}\sqrt{s^2 + A^{\frac{2}{n}} s^{\frac{2n-2}{n}}} :: 1 : \frac{EC}{BC} = \frac{\sqrt{s^2 + A^{\frac{2}{n}} s^{\frac{2n-2}{n}}}}{A^{\frac{1}{n}} s^{\frac{n-1}{n}}} = \sqrt{\frac{s^{\frac{2}{n}}}{A^{\frac{2}{n}}} + 1}$, dal quarto termine vien espressa la velocità del mobile nel punto C conforme a quella, che abbiamo determinata nel numero settimo.

IX. Si sarà accorto chi legge essersi da me supposto, che o si muova, o non si muova nel primo istante dell'azione il corpo A per la direzione A7 normale ad AI, la forza costante, le cui tendenze si mantengono parallele, eserciti sempre azione in pari tempo per lo spazio $AB = s$. Questa supposizione richiede di essere dimostrata. Poichè le direzioni della forza sono sempre parallele, accompagna essa il mobile in ogni punto della curva ACH come se fosse privo della velocità $= z$ per le direzioni parallele ad A7, egualmente lo spigne, e la velocità impressa dalla forza nulla venendo accresciuta, o scemata dalla velocità normale $= z$, riceve il corpo pari accelerazione, ed in pari tempo si esercita pari azione.

Illustriamo la faccenda con un esempio. L'estremità di un elastro sia immobilmente attaccata al punto A della sponda A7 di una nave; e l'altra estremità spinga il corpo verso la sponda opposta IH lungo la linea AI segnata nel pavimento, e normale alla direzione A7, per cui cammina la nave. Essendo il moto della nave comune all'elastro, e al corpo, stanno essi in una quiete relativa, e perciò l'elastro spigne il corpo, l'accelera, ed esercita azione, come se la nave stesse quieta; e cagione massimamente che la velocità della nave per A7 non può recare veruna alterazione alla velocità impressa dall'elastro per la direzione normale

AI

AI, ed alle spazio, per cui esercita azione.

Il perchè si avviera la formola $U = \sqrt{\frac{s^{\frac{2}{n}}}{A^{\frac{2}{n}}}+1}$ fondata sulla supposizione, che l'azione della forza, le cui tendenze si conservano parallele, si eserciti in pari tempo per lo stesso spazio AB o muovasi, o non muovasi da principio il corpo per la direzione AZ normale ad AI.

X. Ora valendoci del solo metodo delle azioni andiamo in traccia di una nuova espressione della velocità del corpo in C. La formola $\frac{s^{\frac{1}{n}}}{A^{\frac{1}{n}}} = u$ c'insegna, che se il corpo ha da acquistare la velocità $=1$, la forza costante dee applicarsi ad uno spazio uguale ad A. S'aggiunga a questa azione l'altra per lo spazio AB $= s$, e chiamata U come sopra la velocità nel punto C, ci si presenterà pel quinto numero l'equazione $\frac{\overline{A+s}^{\frac{1}{n}}}{A^{\frac{1}{n}}} = U$ (6.)

XI. Dovendo i canoni della composizione dei moti andar d'accordo colla formola, che determina la relazione fra lo spazio, a cui si applica la forza, e la velocità guadagnata dal corpo, ha da passare uguaglianza fra le due espressioni della velocità del mobile nel punto C, onde si abbia $\sqrt{\frac{s^{\frac{2}{n}}}{A^{\frac{2}{n}}}+1} = \frac{\overline{A+s}^{\frac{1}{n}}}{A^{\frac{1}{n}}}$, o sia $s^{\frac{2}{n}} + A^{\frac{2}{n}} = \overline{A+s}^{\frac{2}{n}}$, equazione che non può verificarsi, salvo che nel solo caso di $n=2$. E vaglia il vero, la nostra formola dee aver luogo qualunque sia il valore di s. Pongasi $s = A$; e ne risulterà $2A^{\frac{2}{n}} = 2^{\frac{2}{n}}A^{\frac{2}{n}}$, e dividendo per $2A^{\frac{2}{n}}$, $1 = 2^{\frac{2}{n}-1}$: ma se il binario alzato alla potestà $\frac{2}{n}-1$ si eguaglia all'unità, egli è necessario, che sia l'esponente $\frac{2}{n}-1=0$; dunque $\frac{2}{n}=1$, e per conseguenza $n=2$, il che &c.

XII. Per la qual cosa se lo spazio, a cui si applica la forza, si eguaglia ad una potestà semplice della velocità cagionata nel corpo moltiplicata per una costante, l'esponente della detta potestà dee pareggiare il binario; onde si abbia $s = Au^2$; legge che di fatto si adempie in natura, osservandosi ne' gravi, che sono stimolati da una forza adeguatamente costante, che gli spazj, per cui opera la gravità, serbano la ragione dei quadrati delle velocità acquistate.

XIII. Fingasi presentemente, che lo spazio, pel quale la forza agisca, sia eguale ad un aggregato di potestà della velocità guadagnata

guadagnata dal mobile, ciascuna delle quali sia moltiplicata per una costante. E dando principio dal caso più semplice, sia $s = Au^n + Bu^h$. Faccio $s = x + y$ con tal condizione, che si abbia $x = Au^n$, $y = Bu^h$, e per conseguenza $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{A^{\frac{1}{n}}} = \frac{y^{\frac{1}{h}}}{B^{\frac{1}{h}}} = u$, ed $y = \frac{B x^{\frac{h}{n}}}{A^{\frac{h}{n}}}$ (7.)

XIV. Nel momento, in cui la forza comincia ad agire, abbia il corpo la velocità $= 1$ per la direzione normale a quella della forza, e la velocità U del mobile; che si compone dalle due u, 1, si troverà espressa così $U = \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{n}}}{A^{\frac{2}{n}}} + 1}$ (8.).

XV. Ponendo in opera il metodo delle azioni, e fatta la riflessione, che per acquistare la velocità $u = 1$, bisogna che la forza agisca per lo spazio $s = A + B$, così presenterà la formula $A + B + x + y = AU^n + BU^h$, e sostituiti in cambio di y, e di U i valori presi dalle equazioni (7.) ed (8.) $A + B + x + \frac{B x^{\frac{h}{n}}}{A^{\frac{h}{n}}} =$
$A\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{n}}}{A^{\frac{2}{n}}} + 1}^{\,n} + B\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{n}}}{A^{\frac{2}{n}}} + 1}^{\,h}$ (9.)

XVI. Questa equazione dee verificarsi assegnato ad x qualunque valore. Metto $x = A$, e trovo $2A + 2B = A \cdot 2^{\frac{n}{2}} + B \cdot 2^{\frac{h}{2}}$, formola da cui deducesi $A = B \frac{2 - 2^{\frac{h}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} - 2}$ (10.)

La costante A nella equazione $s = Au^n + Bu^h$ è capace di qualunque grandezza. Infatti si agguagli A ad un determinato valore, e vogliasi al coefficiente di u^n assegnarne un altro $a = \frac{A}{g}$. Divido l'equazione per g, onde ne risulti $\frac{s}{g} = \frac{A}{g} u^n + \frac{B}{g} u^h$, e ponendo invece di $\frac{A}{g}$ il suo valore a, e facendo $\frac{s}{g} = z$, $\frac{B}{g} = b$, mi si presenta $z = au^n + bu^h$; equazione affatto simile a quella, che ho preso a disaminare.

Si osservi, che se in cambio di A si pone $\frac{A}{g} = a$, in cambio di B si dee porre $\frac{B}{g} = b$, ed i due coefficienti di u^n, di u^h si deggiono alterare proporzionatamente. Addiviene ciò, perchè i detti coefficienti, conforme vedremo, sono proporzionali alla massa, che si muove colla velocità U, la qual massa sia divisa per la forza costante, ed intanto A, e B possono accettare qualsivoglia valore positivo, in quanto che la grandezza della massa divisa per la forza costante può assumersi a piacimento.

Le stesse avvertenze si accomodano ai casi più composti, quando lo spazio s s'agguaglia a più di due potenze della velocità u moltiplicata per altrettante costanti.

Se

Se alla cognita A può assegnarsi qualunque valore positivo, debbe essa esprimersi conforme è noto per l'equazione $A = \frac{0}{0}$. Avremo dunque per la formola (10.) $B \cdot \frac{2 - 2^{\frac{h}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} - 2} = \frac{0}{0}$, e perciò $B \cdot 2 - 2^{\frac{h}{2}} = 0$, $2^{\frac{n}{2}} - 2 = 0$, ovvero $2 = 2^{\frac{h}{2}}$, $2 = 2^{\frac{n}{2}}$, equazioni, che necessariamente richiedono $h = 2$, $n = 2$.

Le due potenze adunque della velocità si riducono in una sola, il cui esponente si uguaglia al binario, onde si abbia $s = \overline{A + B} \cdot u^2$; il che &c.

XVII. Nè si dica insegnarci la formola (10.) $A = B \cdot \frac{2 - 2^{\frac{h}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} - 2}$, che ad A non meno che a B può competere qualunque valore, benchè non sia $2 - 2^{\frac{h}{2}} = 0$, $2^{\frac{n}{2}} - 2 = 0$. Ammessa questa supposizione, il valore di A, e conseguentemente anche quello di B dipenderebbe dalla grandezza di x, e non più costanti ma bensì variabili dovrebbero riputarsi. Facendo $x = A$ nell'equazione (9.), abbiamo trovato (10.) $A = B \cdot \frac{2 - 2^{\frac{h}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} - 2}$; e ponendo nella stessa equazione (9.) $x = 2A$, ne nascerebbe $3A + B \cdot \overline{2^{\frac{h}{n}} + 1} = A \sqrt{2^{\frac{2}{n}} + 1}^{\,n} + B \sqrt{2^{\frac{2}{n}} + 1}^{\,h}$, o sia $A = B \cdot \frac{(2^{\frac{2}{n}} + 1)^{\frac{h}{2}} - 2^{\frac{h}{n}} - 1}{3 - (2^{\frac{2}{n}} + 1)^{\frac{n}{2}}}$ (11.) valore affatto differente da quello della formola (10.); eccettuato il caso di $n = h = 2$, nel quale si torna a scoprire $A = \frac{0}{0}$, $B = \frac{0}{0}$.

Questa riflessione si adatta altresì a quella ipotesi, che fingono lo spazio s uguale a più di due potestà della velocità u, ciascuna delle quali sia moltiplicata per una costante, nè io ne farò la ripetizione, ma supporrò sempre dover essere $A = \frac{0}{0}$, $B = \frac{0}{0}$ &c.

XVIII. Collo stesso metodo si può trattare l'equazione $s = Au^n + Bu^h + Cu^k$. Pongo $s = x + y + z$ colla condizione che sia $x = Au^n$, $y = Bu^h$, $z = Cu^k$, e perciò $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{A^{\frac{1}{n}}} = \frac{y^{\frac{1}{h}}}{B^{\frac{1}{h}}} = \frac{z^{\frac{1}{k}}}{C^{\frac{1}{k}}} = u$, ed $y = \frac{B \cdot x^{\frac{h}{n}}}{A^{\frac{h}{n}}}$ (12.) $z = \frac{C \cdot x^{\frac{k}{n}}}{A^{\frac{k}{n}}}$ (13.)

XIX. Si muova come sopra il corpo nel punto A colla velocità 1. per la direzione normale a quella della forza, e ne nascerà $U = \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{n}}}{A^{\frac{2}{n}}} + 1}$ (14.).

XX. Ricorro al metodo delle azioni, e fatta l'osservazione, che per imprimere la velocità $u = 1$, fa di uopo che la forza agisca per lo spazio $s = A + B + C$, giungo all'equazione $A + B + C + x + y + z = AU^n + BU^h + CU^k$, e sostituendo in luogo di y, di z, e di U i loro

valori

valori presi dalle formole (12.), (13.), (14.), $A+B+C+B\frac{x^{\frac{h}{n}}}{A^{\frac{h}{n}}}+C\frac{x^{\frac{k}{n}}}{A^{\frac{k}{n}}}=A\sqrt[n]{\frac{x^{\frac{2}{n}}}{A^{\frac{2}{n}}}+1}+B\sqrt[h]{\frac{x^{\frac{2}{n}}}{A^{\frac{2}{n}}}+1}+C\sqrt[k]{\frac{x^{\frac{2}{n}}}{A^{\frac{2}{n}}}+1}$ (15.).

XXI. Si deve adempiere la premessa equazione, assegnato ad x qualsivoglia valore. Sia $x=A$, e si avrà $2A+2B+2C=A\cdot 2^{\frac{n}{2}}+B\cdot 2^{\frac{h}{2}}+C\cdot 2^{\frac{k}{2}}$ (16.), equazione da cui si raccoglie $A=\frac{B\cdot(2-2^{\frac{h}{2}})+C\cdot(2-2^{\frac{k}{2}})}{2^{\frac{n}{2}}-2}$ (17.).

XXII. Conciossiachè la costante A possa ricevere qualsivoglia valore, egli è necessario che questo si esprima per $\frac{o}{o}$, onde si abbia per l'equazione (17.) $A=\frac{B\cdot(2-2^{\frac{h}{2}})+C\cdot(2-2^{\frac{k}{2}})}{2^{\frac{n}{2}}-2}=\frac{o}{o}$, e perciò $B\cdot(2-2^{\frac{h}{2}})+C\cdot(2-2^{\frac{k}{2}})=o$, $2^{\frac{n}{2}}-2=o$, ovvero $B=C\cdot\frac{(2^{\frac{k}{2}}-2)}{2-2^{\frac{h}{2}}}$, $2=2^{\frac{n}{2}}$. L'ultima di queste due formole mi dà chiaramente $n=2$; ed in riguardo alla prima, fatta la riflessione esser B capace di ogni valore, e dover accettar l'espressione $\frac{o}{o}$, ci accorgeremo doversi avverar l'equazione $B=C\cdot\frac{(2^{\frac{k}{2}}-2)}{2-2^{\frac{h}{2}}}=\frac{o}{o}$, dalla quale ne risulta $2^{\frac{k}{2}}-2=o$; $2-2^{\frac{h}{2}}=o$, e finalmente $h=2$, $k=2$. Nascono le stesse determinazioni dallo stabilire $C=B\cdot\frac{(2-2^{\frac{h}{2}})}{2^{\frac{k}{2}}-2}=\frac{o}{o}$.

XXIII. Quindi si deduca la conseguenza, che quando lo spazio s, a cui si applica la forza costante, si ponga eguale a tre potestà della velocità moltiplicate per altrettante costanti $Au^n+Bu^h+Cu^k$, non sussistono le leggi dei moti composti, se non quando sia $n=h=k=2$, dimodochè ne risulti $s=\overline{A+B+C}\cdot u^2$.

XXIV. Inoltrandomi alle quattro, alle cinque potenze &c., il calcolo si allunga, ma il metodo non è diverso, e sempre ci guida a conchiudere, che gli esponenti di tutte queste potenze si agguagliano al binario, e che perciò si riducono ad una sola.

XXV. Resta da considerarsi l'ultimo caso, quando lo spazio s si finge uguale ad una funzione della velocità cagionata nel corpo dall'azione pel dato spazio della forza costante, nella qual funzione abbiano luogo e divisori, e radicali di quantità complesse. Effettuate l'estrazioni delle radici, e le divisioni coi metodi analitici, la funzione si ridurrà ad una serie infinita di potenze della u, gli esponenti delle quali deggiono pareggiare il due, se si ha da salvare il moto composto, conforme nei casi precedenti è stato da me dimostrato. (*)

XXVI.

(*) Veggasi nel Libro I. della Introduzione all'Analisi degli infiniti

XXVI. Per mettere in maggior lume la verità prima spiegata, pongasi $s = Au^3$, e conseguentemente $\frac{s^{\frac{1}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}} = u$. Nell'istante in cui la forza principia ad agire, abbia il corpo la velocità $= 1$ per la direzione normale a quella della forza, e la velocità U del mobile, che si compone delle due u, 1, la troveremo eguale a $\sqrt{u^2+1}$, e sostituendo in vece di u^2 il suo valore $\frac{s^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}$, ne nascerà $U = \sqrt{\frac{s^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}+1}$.

Valendomi del metodo delle azioni, noto che per generare nel corpo la velocità $= 1$, egli è necessario, data l'equazione $s = Au^3$, che la forza eserciti azione per lo spazio $s = A$. Dovrà dunque osservarsi la formola $A + s = AU^3$, o sia $\frac{\overline{A+s}^{\frac{1}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}} = U$: ma per le leggi del moto composto $U = \sqrt{\frac{s^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}+1} = \sqrt{\frac{A^{\frac{2}{3}}+s^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}}$; dunque $\overline{A+s}^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{2}{3}} + s^{\frac{2}{3}}$. Questa equazione è generalmente falsa, non reggendo come dovrebbe a qualunque valore di s; e perciò la supposizione $s = Au^3$ dee riputarsi assurda, perchè ripugna ai canoni necessarj del moto composto.

XXVII. Dimostrata la necessità della formola $s = Au^2$, passo a determinare il valore della costante A. La forza f replicando i suoi impulsi in ogni elemento dello spazio s, cagiona la velocità u nella massa m. La forza, e lo spazio, dalla moltiplicazione dei quali nasce l'azione fs se la forza è invariabile, appartengono alla cagione, e la massa e la velocità all'effetto. Ho già dimostrato che nell'effetto, che suole chiamarsi forza viva, la velocità dee ascendere alla seconda potestà, ed or aggiungo che la massa dee avervi luogo conservando la dimension lineare, onde il detto effetto sia proporzionale ad mu^2. In fatti se due corpi si muovono con eguale velocità, la loro forza viva è certamente come le masse. Conciossiachè la forza, lo spazio, la massa, e la velocità siano quantità eterogenee, la relazione fra la causa e l'effetto si suol esprimer così $fs = \frac{mu^2}{n}$, dimodochè differenziando ci si presenti $fds = mudu$

n

---

infiniti dell'insigne Signor Eulero il Capo IV. alla pag. 46. il cui titolo *De explicatione functionum per series infinitas*.

Il paragone delle due formole $s = Au^2$, $fs = \frac{mu^2}{2}$ determina $A = \frac{m}{2f}$.

XXVIII. Se ds è lo spazio elementare, per cui agisca la forza, e si muova il corpo, essendo com'è noto $ds = u\,dt$, cioè a dire il minimo spazietto scorso dal corpo in ragione composta della velocità u, che si può considerare costante, con cui esso spazio si scorre, e dal tempo dt impiegato a percorrerlo; dal sostituire nella equazione $f\,ds = mu\,du$ in cambio di ds il suo valore $u\,dt$, ne deriva l'altra $f\,dt = m\,du$, o sia integrando, posto che sia costante la forza f, $ft = mu$, la quale nella circostanza da me notata è tanto necessariamente vera quanto $fs = \frac{mu^2}{2}$.

XXIX. Che se, come in moltissimi casi succede, la forza agisce per uno spazio ds, e la massa si muove per un altro spazio dx, si dovrà nella formola $f\,ds = mu\,du$ surrogare in luogo di u il suo valore $\frac{dx}{dt}$, onde ci si presenti $f\,dt = \frac{dx}{ds} \cdot m\,du$, formola della forza riferita al tempo vera e necessaria generalmente.

Discenda il corpo m per un piano inclinato, la cui altezza $= a$, e la lunghezza $= b$, e giacchè relativamente ad esso piano $\frac{dx}{ds} = \frac{b}{a}$, avremo $f\,dt = \frac{bm\,du}{a}$, e perciò integrando $ft = \frac{bmu}{a}$; e quindi la forza f nel tempo t imprimerà alla massa m, che discende lungo il piano inclinato, quella medesima velocità, che avrebbe fatta guadagnare nello stesso tempo alla massa $\frac{bm}{a}$ fornita dal peso f, che liberamente calasse abbasso per la linea del piombo, o pure quella velocità, che avrebbe acquistata in pari tempo il corpo m stimolato dalla forza $\frac{af}{b}$, la cui direzione fosse parallela a quella del piano inclinato. Queste sostituzioni di massa a massa, di forza a forza sono artificj di metodo, che bene spesso nella soluzione dei problemi riescono di grandissimo giovamento.

XXX. Quantunque le formole delle forze continuamente applicate sian necessarie, siccome quelle, la cui variazione distrugge i canoni dei moti composti, che in ogni sistema debbono indispensabilmente avverarsi; nulladimeno se giovano ai disegni limitati degli uomini, quanto più, e con quai

modi

modi anche imperscrutabili avranno servito ai fini liberi e sapientissimi dell'Autore della natura nella creazione dell'universo, il quale contiene in se stesso una prodigiosa unione di libero, e di necessario.

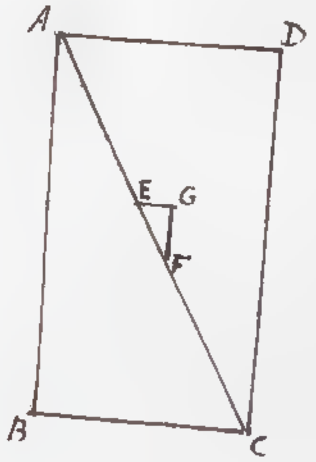


Fig. 1

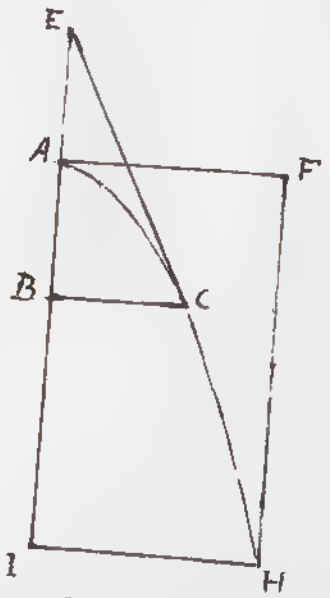


Fig. 2.

Che lo Studio delle Matematiche
non favorisce la
miscredenza.
Dissertazione
stampata nella N. R. Tomo XXVIII

candido

Che lo studio delle Matematiche
non favorisca la Miscredenza.
Dissertazione del Sig.r Co.
Giordano Riccati

Se mai vi fu proposizione assurda, ella è questa, che lo studio delle Matematiche favorisca la miscredenza. Che ciò sostengano i libertini, di leggeri comprendo; ma che venga affermato da uomini pii, e che professano zelo per la religione, mi sembra una contraddizione apertissima. Non è egli lo stesso, il rendere pregiudiziali alla religione le matematiche, che procedono sempre col coraggio della evidenza, ed il tacitamente concedere, che la religione non soffre il lume della verità, e si ripara sotto la tutela della oscurità, e della ignoranza? Nè vale il soggiungere, che avvezzato il Geometra alla certezza, si rende restio a credere con umiltà que' dogmi, che non capisce; imperciocchè sapendo egli quanto poco si estenda la sua cognizione, e nella geometria, e nella fisica, e quanti misterj si racchiudano in queste scienze impenetrabili, e nei loro più nascosti recessi, all'umano intelletto, ha nella occasione di umiliarsi, e di restar convinto che siccome si danno innumerabili misterj nelle mentovate facoltà, non altrimenti, ed anzi tanto più nella teologia si debbano ammettere. Egli è vero, che un libertino si può abusare delle matematiche, e ne abbiamo un esempio in Benedetto Spinoza; ma se si dovesse condannare tutto ciò, che va accompagnato da qualche disordine, si distruggerebbero le cose migliori, ed anco le più sacrosante. Si dovrebbe proibire lo studio delle leggi, perchè vi ha chi difende le cause ingiuste; lo studio della chimica, perchè può ~~dar fomento a~~ ad uno scellerato somministrare i veleni; e sino l'esercizio de' Sacramenti, perchè la loro santità ~~vengon~~ viene profanata coi sacrilegi. Che se mai uomini che la matematica hanno vacato assiduamente

qualche

cando

qualche danno alla religione; di quanto maggior utile non sono state cagione, qualora sono per difenderla se n'è servito chi né le intelletto, né la volontà non avea pervertiti? Il perchè sarà mio scopo il mostrare, che lungi dal fomentare la miscredenza, hanno le Matematiche conferito alla religione, e ad essa apportati sommi vantaggi.

L'esistenza dell'Ente supremo è il fondamento principale non solo della religione naturale, ma ancor della rivelata, dovendo io prima esser convinto, che Dio ci sia, se ho da credere alla sua parola. Riflettono ottimamente Giovanni Locke, ed il D.r Clarke, che qualche cosa ci ha da essere stata sin ab eterno. Ora ciò non può asserirsi della materia, la quale abbisogna di una estrinseca determinazione. Ha dimostrato il Co. Jacopo Riccati mio padre, nel Saggio intorno il Sistema dell'Universo, e ne' Principj e ne' Metodi della Fisica, che la quantità in genere non può assolutamente né ascendere all'infinito, né discendere all'infinitesimo: per la qual cosa la materia esige di essere determinata ~~in~~ in riguardo alla sua quantità, e all'attual divisione delle particole che la compongono, ed alla misura della forza, e della velocità, indi è fornita, e del tempo sin da quando ha cominciato ad esistere. Ma e chi ha da essere questo determinatore? Ha da essere una Sostanza necessariamente esistente di assoluta, e non ipotetica necessità, che non appartenendo al genere della quantità, sia ~~fornita~~ dotata di ~~perfettissima~~ somma impartibile unità, e di una perfezione trascendentemente infinita, a cui nulla possa aggiungersi o levarsi, e che per conseguenza

non

non possa soggiacere a qualsivoglia benché minima alterazione. Questa Sostanza ha esistito sin dalli eternità, ma di una eternità degna di lei, in cui non vi è di prima, nè poi; e questa Sostanza, cioè Iddio ottimo massimo ponendo in opera la sua infinita sapienza, la sua infinita bontà, la sua infinita potenza, ha nel principio dei secoli creato dal nulla quella quantità di materia che era confacente a suoi fini, ed architettato il prodigioso immenso edificio dell'Universo in cui ha collocato delle coscienze create atte a conoscere, ad ammirare, e a dar lode al Fonte inesausto di tutti i beni.

Quantunque la creazione sia un mistero impercettibile all'umano intelletto, nulladimeno la geometria giunge a discoprire, che ci ha da essere stato un momento, in cui incominciò la divina Onnipotenza la materia ha cominciato ad esistere. E vaglia il vero essendo anche il tempo una quantità, ripugna secondo ha discoperto mio Padre, che menti di trascendentemente all'infinito, e perciò ha da aver avuto principio. Ci convince adunque la geometria della certezza del Dogma della creazione e va di accordo colla rivelazione che ce lo propone da credere. Apporta in oltre l'altro considerabile vantaggio alla religione di farci toccar con mano doversi ammettere de' misteri benché superiori ed impenetrabili alla limitatissima nostra mente.

Si aggiunga che prendendo scorta la matematica ad estendere in qualche modo la perfezione dell'Universo, da questa sorgente si deriva un'altra evidentissima discoperta dell'esistenza della Divinità. Dachè si ha insegnato l'Astronomia, scienza sommamente sublime, che le stelle fisse son tanti soli, le quali

probabilmente

probabilmente hanno il corteggio dei loro pianeti; dacchè si è scoperto che la doppia distanza della terra dal sole è quasi un punto rispettivamente all'immensa lontananza dalle stelle fisse; dacchè Cristiano Ugenio per darcene una qualche idea ha calcolato lo spazio molto grandissimo, per cui dall'orbita nostra dovrebbe discostarsi il sole, acciocchè apparisse della stessa grandezza di una data stella fissa, per esempio di Sirio; ella è per così dire a dismisura cresciuta nell'umano concepimento la grandezza dell'universo, e perdendosi la persona in questo palagio di cui si ignorano i lidi, si alza la mente al Divino Architetto e ben a ragione esclama col reale Salmista _Coeli enarrant gloriam Dei_.

Avea il Keplero colle osservazioni trovato, che Marte descrive un'ellissi conica intorno al sole collocato in uno de' fochi; e che i quadrati dei tempi periodici delle planetarie rivoluzioni dei pianeti intorno al sole stavano come i cubi delle medie distanze. Mossi i primi passi, non si volea meno della sublime geometria del Cavalier Newton per continuare il cammino. Cercò egli adunque qual legge di forza centrale si rendea necessaria, acciocchè i pianeti girino per ellissi, conciochè ritorna al foco, e trovò che esse forze debbono accettare la ragione reciproca dei quadrati delle distanze. Supponendo poscia che la stessa scala di forza regoli tutto il planetario sistema, gli si presentò la stessa legge dei tempi periodici, che il Keplero avea scoperto colle osservazioni.

osservazioni. Nè pago di ciò si pose il gran Geometra ad indagare le curve tutte, che con la mentovata legge di forze possono dai pianeti percorrersi, e ben presto si accorse, che ad essa legge si adattano tutte le sezioni del cono. E qui egli è di uopo ammirare la perfezione del solare sistema ideato in giro divi così da una stella, ad in esse non si ammettono salvo che le curve ellittiche ritornanti in se stesse, e che tengono unito il sistema, escludendone le paraboliche, e le iperboliche, che procedendo all'infinito, ben presto il sistema discioglierebbero.

Col mezzo delle dottrine diottriche siamo giunti almeno in parte ad intendere la maravigliosa struttura dell'organo della vista. Il cristallino lavorato a strati, che crescono di densità quanto più si accostano al centro, ottiene nell'ottima maniera l'effetto, che tutti i raggi, che partono da un punto dell'oggetto, verso del quale è diretto l'occhio, si riuniscano in un punto analogo della retina, onde in essa si forma una disposizione di raggi affatto simile a quella che dall'oggetto proviene. In sì fatta guisa l'anima distingue un oggetto dall'altro. Che se siccome i raggi riflessi per tutte le direzioni da un punto dell'oggetto occupano tutta la pupilla, così occupassero ancor la retina, non ci sarebbe che confusione, e mescolandosi insieme tutti i diversi colori, non si distinguerebbe un oggetto dall'altro. Mi servirà di esempio un Presbita, il quale preso in mano un libro, se non seguendo un'esatta unione di raggi nella retina a cagione dell'occhio troppo spianato, non discerne le lettere perchè l'immagine di una si sovrappone a quella dell'altra, nè potrebbe mai leggere,

sa

cando

se un pajo di occhiali formati con lenti convesse non mettesse al difetto dell'organo opportunamente riparo.

Io mi lusingo d'avere penetrata la ragione, per cui la natura ha introdotto nell'organo dell'udito tre canali semicircolari, ed una chiocciola, scorrendoli nell'[illegible] dalla [illegible]. Nello Schediasma IV. Delle Corde, ovvero Fibre elastiche ho dimostrato che una corda può in se ricevere tutti i suoni, che sono unisoni alle parti aliquote della sua lunghezza. E giacchè una parte minima rispettivamente alla intera lunghezza, è sempre parte aliquota, si potranno ad una corda comunicare tutti i suoni unisoni a quelli, che le sue parti minime sono atte a produrre. Sappiamo per esperienza, che dentro certi limiti determinati da M. Sauveur tutti i suoni sono portati all'anima dal nervo uditorio. Egli era dunque necessario che questo fosse assai molle, onde una molto piccola porzione di sua lunghezza fosse unisona ai suoni, che è capace di udire l'orecchia umana, e che la lunghezza stessa fosse grandissima rispettivamente ad alta porzione. Tutto ciò si avvera nell'organo dell'udito, osservandosi il nervo uditorio reso sommamente molle da un fluido che il labirinto riempie, e girando esso nervo per i tre canali semicircolari, e per la chiocciola acciocchè in piccolo sito una lunga corda contenga[illegible].

Chi sa che col soccorso dell'anatomia, della geometria, e della meccanica non si manifestino un giorno gli artifizj anche degli altri sensorj: sebbene in riguardo al cerebro io credo ciò più desiderabile che da sperarsi. Quest'organo maraviglioso, in cui gli altri tutti mettono capo, è il meno capito, il più recondito, ed il più inaccessibile all'umano intelletto. Qual sarà quel divino ingegno, che

giunga

giunga a segno di intronarsi nella macchina dagli ordigni stupendi, ~~dai~~ [da cui] quali dipende la fantasia, ed il severo incanto della memoria, la quale si perde qualora nasca quel tale sconcerto negli organi? Io temo assai che la nostra mente non abbia ali sufficienti per un volo così sublime, e che conscia della sua debolezza [non la vorrei salvochè] ~~dubbia~~ riconoscendosi adorare da lungi dal grande Artefice la sapienza infinita.

Ho dato appena qualche sfioro della perfezione dell'universo, che riesce alla geometria di svelare. Il campo è immensamente spazioso, nè può restringersi dentro gli angusti confini di una breve dissertazione. Stringo adunque il passo volonteroso, e dalla perfezione di questa gran macchina, che abbiamo davanti gli occhi, mediante il calcolo della probabilità deduco l'esistenza di un sapientissimo Autore. Non si troverà fortunato che asserisca, che la Venere de' Medici, che il Laocoonte abbiano tratta l'origine da una fortuita combinazione, e che l'Eneide di Virgilio sia nata dall'estrarre a caso da un'urna le lettere, che la compongono. Se Virgilio avesse potuto comporre infiniti poemi, sarebbero riusciti parti degni della sua mente. Ma cavando dall'urna le lettere, si può appena concedere che dopo un numero immenso di accidentali combinazioni fosse uscita l'Eneide. Il perchè la probabilità che l'Eneide sia opera del caso, o di Virgilio sta come l'unità ad un numero fisicamente infinito, e perciò egli è certo certissimo che il mentovato poema è lavoro di un uomo, e chi dicesse altrimenti sarebbe trattato da pazzo. Non cesso di maravigliarmi, che al Creatore si faccia quel torto, che non si fa alla creatura, e che non attribuendosi al caso una pittura, una statua, un palagio, si voglia poi che l'universo sia sua fattura, e ciò tanto più quanto che la perfezione di un'opera umana dalle più insigni è un fiore

e pretto

e pretto nulla messa al paragone con
quella dell'universo. Nè vale il sutter-
fugio di far ricorso all'eternità anteceden-
te, nell'infinito corso della quale avendovi
assiduamente la materia rimescolata, fi-
nalmente dopo innumerabili mondi, che
presto si disciolsero a cagione della loro
imperfezione, spuntò fuori il presente, che
sendo fortunatamente bene organizzato,
ha durato per tanti secoli, e tuttavia si
conserva. Se a chi argomenta così gio-
va far operare un agente cieco per tutta
l'eternità, sarà maggiormente a me
concesso, se non altro il supporre, che
per altrettanto tempo abbia esplicate
la sua operazione un Mastro infinita-
mente sapiente. Or ecco che il mio
argomento nulla temendo il bujo di un
tempo eterno e senza principio, che è di-
mostrato impossibile, si conserva nella
sua luce. Qualunque mondo fra gli in-
finiti, che Dio avesse creati, dimostrerebbe
l'eccellenza del grande Artefice: ma fra
milioni e milioni di mondi lavorati
dal caso pieni di assurdità di qual grado
si può asserire che all'impazzata ne
sorga uno di qualche perfezione fornito.
Dunque la probabilità che il nostro mondo così perfetto sia fatto
dal caso è nulla posta al confronto con
quella che sia fatto da Dio; dunque egli
è certo che il mondo è fatto da Dio,
e non può dubitarne chi ha fior di senno.

I canoni stessi delle probabilità di-
mostrano la libertà dell'umano arbitrio.
Se l'uomo è privo di libertà, egli è ancor
privo di scelta, e senza scelta non c'è

probabilità

probabilità, che fossero uscite alla luce le opere di un Galileo, di un Cartesio, di un Newton, di un Leibnizio.

Se non che sento da taluno obbiettarmi, che concedendo ancora preferibile la geometria agli argomenti metafisici, coi quali si prova la religione naturale, non si può ammettere lo stesso rispettivamente agli argomenti morali coi quali si prova la rivelata. Deh fa toccar con mano la fiacchezza di questa risposta riflettendo che la dimostrazione di ogni verità morale dipende dalle regole delle probabilità, e per conseguenza anch'essa è di giurisdizione delle matematiche. Non è di meno, moralmente certo che Giulio Cesare ci sia stato, di quello che metafisicamente la somma degli angoli di un triangolo pareggi due retti. Ora da che si deduce la certezza, che Giulio Cesare abbia esistito, se non dal fonte della probabilità? Come si può mai credere, che tanti uomini vari di genio, di professione, di nazione, di religione, di tempo, o scrivendo, o coniando medaglie, o incidendo iscrizioni si siano così puntualmente accordati, senza veruna discrepanza, o contraddizione a farci ingojar questa falsità della prima esistenza di Giulio Cesare? La probabilità della supposta cospirazione è così menomissima posta al paragone colla probabilità che abbiano scritto ed operato con buona fede, ch'egli è certo certissimo che Giulio Cesare un tempo ci è stato.

Sono tali, e tanti i motivi di credibilità, che dimostrano la verità della nostra santissima Religione, che specialmente l'aggregato loro si estolle ad una convincente evidenza. Legga chi non ha l'intelletto e il cuore avvelenato i più valenti Difensori della Religione Cristiana, fra i quali mi

giova

cando

giova nominare a titolo di onore, un nostro Insigne Italiano, il P. Antonino Valsecchi dell'Ordine de' Predicatori pubblico primario Professore di Teologia nell'Università di Padova, e sentirà nel suo interno la dolcissima compiacenza di ritrovarsi nel seno della vera Religione, e ne porgerà i dovuti ringraziamenti all'Altissimo.

Ritornando pertanto alla Geometria, il suo costume introdurrà una certa docilità di mente quanto docile ad ammettere i Dogmi derivati dalle Scritture, e dalla Tradizione, che la Chiesa ci propone da credere, altrettanto cauta, e guardinga nell'aderire a certe credulità, che allattano la superstizione, e la falsa divozione: sopra di che non può mai abbastanza lodarsi l'Opera della Regolata Divozione dell'immortal Muratori. Ci sono pur troppo alcuni che confondono la Religione con la concessata a certe pratiche piccole, affettate, e soverchiamente esteriori. Un Geometra di buon costume professerà, e difenderà una soda Religione, e rivolgerà le sue meditazioni a rendere più stabile la. Io posso gloriarmi di aver avuto un Padre, in cui gli studj delle Matematiche hanno confermata la Religione, che promosse sempre a tutto suo potere di difendere, della qual verità ne posso render fedele testimonianza, e le sue Opere non lasciano, che se ne dubiti. Conchiudo col tornar a ripetere che le Matematiche lungi dal fomentare la miscredenza gioveranno alla Religione, perché siano professate da chi è alieno dai vizj ed amante dell'onestà.

Annotazione.

Appoggiandomi alle dimostrazioni del Co. Jacopo Riccati mio Padre, contenute nel Saggio intorno al Sistema dell'Universo, e nei Principj, e Metodi della Fisica, ho fermamente asserito, che la quantità in genere, e segnatamente la materia non può assolutamente ascendere all'infinito. Un acuto ingegno ha mossa l'obbiezione, che le dimostrazioni di mio Padre sarebbero inconcusse, se si pretendesse che la materia divenisse assolutamente infinita col mezzo di continui accrescimenti. Ma se si concepisca questa immensa materia tutta ad un tratto, perdono incontanente la forza le mentovate dimostrazioni. A cagione di sciogliere questa obbiezione, m'immagino condotta una linea verticale, che sia tanto trascendentemente alta, quanto la materia. Segno in essa una linea data (a), e poichè il nulla in (a) c'entra un numero di volte assolutamente infinito, il termine $\left(\frac{a}{o}\right)$ esprimerà l'altezza occupata dalla materia. Similmente s'intenda delineata una retta orizzontale di pari lunghezza $\left(\frac{a}{o}\right)$, che colla verticale si congiunga ad angolo retto, e con queste due linee formato un quadrato, la cui superficie $\left(\frac{a}{o}.\frac{a}{o}\right)$. Cotal quadrato esser dovrebbe senza dubbio trascendentemente maggiore del rettangolo $\left(\frac{a}{o}.a\right)$. Or acciocchè questo si verifichi, si rende necessario, che o.o sia sopra ogni immaginazione minore di 1.o, il che trattandosi di nulla assoluti è un

manifesto

manifesto assurdo. perchè tanto $(0 \cdot 0) = (1-1) \cdot (1-1) = (1-1)(-1+1) = 0-0$, quanto $(1 \cdot 0) = 1 \cdot (1-1) = 1-1 = 0$ sono sempre uguali allo stesso nulla assoluto. + Svanisce l'inconveniente, se la grandissima distanza, a cui si estende la materia, si ponga eguale ad $\left(\frac{a}{n}\right)$, significando per (n) una frazione menomissima sì, ma non eguale a nulla, onde ne risulti il quadrato $\left(\frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n}\right)$, che sarà sommamente maggiore del rettangolo $\left(a \cdot \frac{a}{n}\right)$, perchè $(n \cdot n)$ è immensamente minore di $(1 \cdot n)$, la qual verità viene chiaramente dimostrata dall'analogia $1 : n :: n : nn$; da cui si deduce, che siccome (n) è piccolissima in riguardo ad (1), così (nn) è picciolissima in riguardo ad (n).

Si potrebbe opporre al mio vaziocinio, che supposta (n) minima, in quella guisa, per cui nell'analogia $1 : n :: n : nn$ è menomissima (nn) rispettivamente ad (n), non altrimenti nell'analogia $1 : 0 :: 0 : 00$ dovrebbe $(0 \cdot 0)$ essere trascendentemente minore di (0). Egli è di uopo frattanto il stuzzicare riflettere, che il nulla siccome non quanto non si può trattare colle leggi della quantità. Abbiasi la formola $(am) = (bm)$, e da ognuno si accorderà, che sendo (m) una quantità, fatta per (m) la divisione, ne risulterà $(a) = (b)$. Che se $(m) = (0)$ assolutamente, qualunque siano le grandezze di (a), e di (b), avremo sempre $(a \cdot 0) = (b \cdot 0)$, e quindi se dividendo per nulla si pretendesse $(a) = (b)$, si cadrebbe inescusabilmente in paralogismo.

Ma lo Oppositore soggiungerà, che accordandosi

+ Si osservi che $0 \cdot 0 = 0-0$. Aguagliasi $0 \cdot 0$ ad una porzione nulla del nulla, e tale è altresì il valore di $0-0$; perchè detratto il nulla dal nulla, resta una parte nulla del nulla. Il nulla medio fra le grandezze positive, e negative non può riputarsi nè positivo, nè negativo, ed è privo di quantità. Quindi il nulla assoluto si aguaglia a qualunque suo multiplo, ed a qualsivoglia sua parte; e perciò ne risulta l'assurdo, che un quadrato, il cui lato $= \frac{a}{0}$ non apparisca trascendentemente maggiore dello stesso lato. Svanisca l'inconveniente &c.

dandosi tutti gli Analisti nello asserire, che a $(\frac{0}{0})$ può competere qualunque valore secondo le circostanze, sembra innegabile, che si diano nulla di grandezza diversa. Abbiasi per esempio l'equazione al triangolo $(ax)=(by)$, e per conseguenza $(\frac{a}{b})=(\frac{y}{x})$; e poichè nel triangolo quando $(x)=(0)$, è parimente $(y)=(0)$, scopriremo in tal circostanza $(\frac{a}{b})=(\frac{0}{0})$, e quindi $a : b :: 0 : 0$, cioè i due nulla in data ragione. E qui osservo, che intersecandosi in un punto la diagonale del triangolo colla linea, in cui si segnano le ascisse (x), in qual punto, che supponesi indivisibile, tanto (x), quanto (y) sono eguali al nulla assoluto; ed in tal circostanza si verifica l'equazione $(ax)=(by)$; perchè (a), e (b) sono moltiplicati pel nulla assoluto $=(1-1)$, onde ne risulta $(a-a)=(b-b)$. I due nulla della formula $(\frac{a}{b})=(\frac{0}{0})$ non sono assoluti, ma bensì relativi, siccome quelli che esprimono le coordinate (x), (y) nelli atto, che nascono, o che si annullano. Ora nella formula $(\frac{a}{0})$ che dinota l'altezza senza fine della materia, il nulla è del assoluto, e perciò non soggiace alle leggi dei nulla relativi [illegible]

Comprendo adunque che la legge, che si preservano illese le dimostrazioni de' suoi Autori, e che senza dubbio la materia non può essere assolutamente infinita, e le può al più competere un infinito relativo, quale sarebbe rispettivamente alla sua altezza verticale $(\frac{a}{n})$, quando (n) fosse infinitesima, ma non eguale a nulla. Io inclino per altro a credere, che la materia stia dentro i limiti del finito, potendo questi immensamente dilatarsi per servire alla magnificenza del Creatore.

cando

Annotazione I.

Per mettere vie più in chiaro l'assurdità della confutata Proposizione, osservo che il celebre Origene, il quale reggeva la famosa Scuola Ecclesiastica d'Alessandria, insegnava ai suoi Discepoli Geometria, Aritmetica, e le altre previe Discipline, asserendo *non mediocrem illos facultatem ex hujusmodi studiis percepturos esse ad sacrarum Scripturarum intelligentiam*; e che perciò *saecularis literaturae, et philosophiae studia sibi quoque imprimis necessaria esse existimavit*, come testifica Eusebio nella Istoria Ecclesiastica Lib. VI. Cap. XVIII.

Annotazione II.

Appoggiandomi alle dimostrazioni del Co. Jacopo Riccati mio Padre contenute nel *Saggio intorno al Sistema dell'Universo*, e nei *Principj, e Metodi della Fisica*, ho fermamente asserito, che la quantità in genere, e segnatamente la materia non può assolutamente ascendere all'infinito. Un acuto ingegno ha messa l'obbiezione, che le dimostrazioni di mio Padre sarebbero inconcusse, se si pretendesse che la materia divenisse assolutamente infinita col mezzo di continui accrescimenti. Ma se si concepisca questa immensa materia tutta ad un tratto; perdono incontanente la forza le mentovate dimostrazioni.

A cagione di sciogliere questa obbiezione, mi immagino condotta una linea verticale, che sia tanto trascendentemente alta, quanto la materia. Segno in essa una linea data = a,

a poichè il nulla in a c'entra un numero di volte ~~assolutamente~~ immensamente infinito, il termine $\frac{a}{o}$ esprimerà l'altezza occupata dalla materia. Se qualcuno giudicasse quest'altezza assolutamente infinita, s'ingannerebbe; imperciocchè in cambio di a io poteva assumere $a a$, $a a a$ &c. $a \cdot \infty = \frac{a}{o}$; e certamente l'altezza $\frac{a}{o \cdot o}$ sarebbe stata immensamente maggiore di $\frac{a}{o}$. Similmente in luogo di a prendendo $\frac{a}{o \cdot o}$, ne sarebbe risultata l'altezza trascendentemente più grande $\frac{a}{o \cdot o \cdot o}$. Si aggiunga, che la linea verticale si può concepire continuata altrettanto all'ingiù, onde la somma della due altezze superiore, e inferiore si agguagli per esempio a $\frac{2a}{o}$, e per conseguenza all'altezza superiore $\frac{a}{o}$ non compete il titolo di assolutamente infinita. Per la qual cosa gl'infiniti $\frac{a}{o}$, $\frac{a}{o \cdot o}$, $\frac{a}{o \cdot o \cdot o}$ &c. non sono assoluti, e quindi altresì non deggiono riputarsi assoluti i nulla, che formano i denominatori nelle sovrascritte frazioni; perchè se (o) fosse un nulla assoluto, non si potrebbe dare un nulla minore di lui.

Quello, che ho detto della linea infinita, si può applicare alle superficie, ai solidi. Paragonato il rettangolo $\frac{a}{o} \cdot \frac{a}{1}$ col quadrato $\frac{a}{o} \cdot \frac{a}{o}$, il secondo è infinitamente maggiore del primo. Se il lato del quadrato fosse $= \frac{a}{o \cdot o}$, ne proverrebbe un quadrato $\frac{a}{o \cdot o} \cdot \frac{a}{o \cdot o}$ immensamente più grande di $\frac{a}{o} \cdot \frac{a}{o}$. Le stesse riflessioni si applicano ai solidi per esempio $\frac{a}{o} \cdot \frac{a}{a} \cdot \frac{a}{1}$, $\frac{a}{o} \cdot \frac{a}{o} \cdot \frac{a}{o}$, $\frac{a}{o \cdot o} \cdot \frac{a}{o \cdot o} \cdot \frac{a}{o \cdot o}$ &c.

L'esposta dottrina vengono dall'Analisi confermata

cando

confermata, accordandosi tutti gli Analisti nell'asserire, che a $\frac{0}{0}$ può competere qualunque valore secondo le circostanze, il che necessariamente richiede, che si diano nulla di grandezza diversa. Abbiasi esempigrazia l'equazione al triangolo $ay = bx$, e per conseguenza $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$; e perchè nel triangolo quando $x = 0$, è parimente $y = 0$, scopriremo in tal incontro $\frac{a}{b} = \frac{0}{0}$, e quindi $0 : 0 :: a : b$, cioè i due nulla in data ragione. L'equazione $ax = y^2$ della parabola si disponga così $\frac{a}{y} = \frac{y}{x}$, e nella ipotesi che x, ed y siano eguali a nulla, avremo $\frac{a}{0} = \frac{0}{0}$. Ma $\frac{a}{0}$ è certamente grandezza infinita; dunque $\frac{0}{0} = \infty$, e perciò il nulla superiore immensamente più grande dell'inferiore. Invertendo la detta equazione troveremo $\frac{0}{a} = \frac{0}{0}$, espressione, che apertamente dimostra il nulla nel numeratore incomparabilmente più piccolo di quello posto nel denominatore.

Comprenda adunque chi legga, che si preservano illese le dimostrazioni di mio Padre, e che senza dubbio la quantità in genere, e specialmente la materia non può essere assolutamente infinita. Le può al più competere un infinito relativo, quale sarebbe rispettivamente alla sua altezza verticale $\frac{a}{n}$, quando n fosse infinitesima, che è quanto a dire uguale ad un nulla relativo. Io inclino per altro a credere, che la materia stia dentro i limiti del finito, potendo questi immensamente dilatarsi, e servire alla magnificenza del Creatore.

Lettera sopra un Articolo de' Signori Efemeridisti di Roma, che tratta della Forza viva, al Nobiliss. e Chiariss. Sig.r Co. Giordano Riccati. N. G. Calogeriana Tomo XXX. Opuscolo II. Venezia
1776. Appresso Simone Occhi.
Alla fine di questa Lettera leggesi la seguente Lettera, avvertendo, che nella stampa sono stati tralasciati alcuni passi.

Parere sopra un Articolo de' Signori Effemeridisti di Roma, che tratta della Forza Viva, al Nobiliss. e Chiariss. Sig. Co. Giordano Riccati. N. R. Calogeriana Tomo XXX. Opuscolo II. Venezia MDCCLXXVI. Appresso Simone Occhi.

Alla fine di questo Parere leggesi la seguente Lettera, avvertendo che nella stampa sono stati tralasciati alcuni passi.

Fra gli ingegni più belli, che il Co. Vincenzo Riccati mio fratello ha avuto il piacere di assistere negli studj delle Matematiche, mi ha più volte nominato con molta lode la degnissima sua Persona. Desiderava che fosse ancora tra' vivi, onde potesse servirla nell'esaminare le sue Riflessioni sopra quanto si è pubblicamente esposto nell'Effemeridi di Roma intorno alla Forza Viva: ma giacchè Iddio Signore l'ha chiamato a se; m'ingegnerò di supplire alle sue veci in quella maniera, che mi si renda possibile.

Ho letto con tutta l'attenzione le mentovate Riflessioni, e le ho trovate sommamente aggiustate, e convincenti. In riguardo alle tre sorti di ostacoli, che può incontrare un corpo; ostacoli insuperabili, che tutto affatto annullino il movimento del corpo; ostacoli, che non abbiano, che la resistenza necessaria per annullare il movimento, e lo annullino in un istante, come si pretende che succeda nell'equilibrio; ostacoli finalmente, che annullino a poco a poco il movimento, come succede nel moto ritardato; mi sembra evidente, che vaglia la stessa formola $\int f ds = \frac{mc^2}{2}$, intendendo per f la forza dell'ostacolo, e per c la velocità del corpo m nell'atto di cominciare ad incontrare l'ostacolo. Nel primo caso sarà grandissima la forza f, e picciolissimo lo spazio, per cui reagisce. Calerà alquanto la forza nel secondo caso e crescerà lo spazio, rimanendo per altro quella assai grande, e questo assai picciolo. Nel terzo caso la forza riuscirà di tale misura, che sarà molto bene osservabile lo spazio, per cui resiste.

Dopo che mio fratello ne' suoi Dialoghi ha rischiarata la quistione della Forza Viva, sembra impossibile, che alcuni de' più sublimi Geometri tentino di nuovamente oscurarla. In due sole maniere può concepirsi che agisca la forza, o repli-

cando

cando i suoi impulsi ad ogni elemento dello spazio, o replicando i suoi impulsi ad ogni elemento del tempo. Dalle due supposizioni nascono le formole $\int f ds = \frac{mu^2}{2}$; $\int f dt = mu$, amendue vere nei moti diretti. Esercitando f una sola azione, e non essendo $\int f ds = \int f dt$; egli è di uopo vedere, qual sia la vera misura dell'azione. Io rifletto, che se la forza non si applica allo spazio, non si dà certamente mutazione di stato nel corpo, benchè la forza stessa lo stimoli per qualsivoglia tempo. Lo spazio dunque soltanto è essenziale all'azione della forza, e quindi da $\int f ds$, e non da $\int f dt$ l'azione vien misurata. Avverta che dt non significa quel tempicello, ne' cui istanti la forza replica i suoi impulsi, ma bensì quel tempicello, in cui si passa lo spazio ds, per quale la forza sollecita il corpo m. Consideri ella la formola $\int f dt = ft = mu$ in riguardo ad un corpo grave, che riposi sopra un piano orizzontale. Se per t si intendesse quel tempo, in cui la gravità replica i suoi impulsi, giacchè t può supporsi quantità finita, dovrebbe anche essere tale la velocità u del corpo. Ma realmente $u = 0$, perchè il corpo riposa in quiete; dunque anche $t = 0$, il che si avvera di quel tempo, in cui si scorre lo spazio s, che nella presente ipotesi è uguale a nulla. Quindi nei moti diretti $f dt = m du$ è una formola di conseguenza, nata dal sostituire nella vera misura dell'azione $f ds = mu du$, $\frac{ds}{dt}$ in cambio di u, il qual dt significa quel tempicello, che si spende nel passare lo spazio ds, per cui si muove il corpo, e per cui viene dalla forza sollecitato.

Senonchè io sono stato troppo condiscendente nell'accordare, che la formola $f dt = m du$ si avveri sempre nei moti diretti. Egli è di uopo apporvi la condizione, che la forza agisca, ed il corpo si muova per eguali spazj.

Al punto F del vette FM mobile intorno al punto C si applichi con direzione normale allo stesso vette la forza f, che agendo per lo spazio $Ff = ds$, acceleri il corpo m privo di gravità collocato in M, che colla velocità u scorre in pari tempo lo spazio $Mm = dz$. Per la formola della azione universalmente vera avremo $f ds = mu du$. Si ponga in cambio di u il suo valore $\frac{dz}{dt}$, e ne risulterà $f \frac{ds}{dz} \cdot dt = m du$,

formola

formola che non si accorda con $fdt = mdu$, se non nel caso che sia $ds = dz$, o sia $Ff = Mm$, e per conseguenza $CF = CM$, di modochè la forza agisca, ed il corpo si muova per uguali spazj. Acciocchè si verifichi una formola simile alla $fdt = mdu$, quando ds, dz son disuguali, bisogna ricorrere ad un artificio di metodo. Si collochi in M una forza p di tal grandezza, onde si abbia $fds = pdz$, e quindi $p = \frac{fds}{dz}$, la qual forza spinga da M verso m, e levata la forza f, si troverà $pdt = mdu$. Questa sostituzione può farsi, perchè le due forze eserciterebbero uguali azioni $fds = pdz$; ma in sostanza in cambio della forza f, ch'è in natura, se ne pone un'altra suggerita dal metodo, che soltanto si trova nella mente del Geometra.

Mentre poi si tratta di moti indiretti, restando sempre ferma la formola $fds = mudu$, non si accorda mai colla verità $fdt = mdu$. Imperciocchè scorra il corpo m

lo spazio $Fg = dz$ nel tempo dt, in cui la forza f agisca per lo spazio $Ff = ds$, e si scoprirà come sopra $\frac{fds}{dz} \cdot dt = mdu$. Abbandonata la forza f, ch'è in natura, si può surrogare con un artificio di metodo la forza tangenziale $p = \frac{fds}{dz}$, passando con ciò dal moto indiretto al diretto. &c.

Una recente invenzione frattanto dell'Ab. Vincenzo ha dato l'ultimo crollo alla rovinosa formola $fdt = mdu$. Ha notato egli che si danno alcune forze, le quali in riguardo al corpo passano da punto a punto. Gli ha servito d'esempio il Cuneo col quale si fendono i tronchi degli alberi, che viene presso dalle fibre del legno in punti diversi, secondochè va sempre più penetrando dentro nel tronco. Sopra questo argomento ha distesa una Dissertazione uscita in pubblico ultimamente nella Nuova Raccolta di Opuscoli, che si stampa dalli Occhi in Venezia. Per la soluzione dei problemi spettanti alle forze, che passano da punto a punto del corpo, non vagliono i principj del vette, e delli equivalenza delle potenze, e solamente serve il metodo delle azioni, o sia la formola $fds = mudu$; e quindi in sì fatti problemi non si può usare il giochino di sostituir forza a forza.

Sembrami che la serie delle ragioni da me esposte decida

la

la proposizione dimostrativamente, e che non vi sia più luogo a disputa ragionevole. Che poi l'effetto $\frac{mu^2}{2}$ non lo vogliano chiamar Forza Viva, nulla rileva. Questa denominazione è nata dal considerar l'effetto come causa, e la causa come effetto. Siccome per imprimere al corpo la velocità u, ci vuole l'azione $\int f ds = \frac{mu^2}{2}$; così per estinguere la detta velocità, si richiede la reazione $\int f ds = \frac{mu^2}{2}$, e questa reazione si considera come effetto dalla cagione $\frac{mu^2}{2}$, il che è molto conforme alle idee comuni, e popolari. Si spinga normalmente una palla contro una corda tesa: si dice che la palla ripiega la corda, quando a parlare più propriamente si dovrebbe affermare, che l'azione dell'elasticità della corda estingue la velocità della palla. Di questi miei raziocinj ne faccia quell'uso, che più le sembra opportuno. Se Ella stimasse bene di aggiugnerli dopo le sue riflessioni, sembrami che si leverebbe al nostro argomento quella oscurità, in cui fanno ogni sforzo di involgerlo.

Io tengo due Lettere scritte da mio fratello, una sopra un passo del nuovo Giornale di Italia stampato in Modena, in cui hanno mano gli Autori delle Effemeridi di Roma, nel qual passo si antepone una soluzione del P. Frisi a quella del P. Riccati; e l'altra diretta all'Autore della Relazione delle Instituzioni Analitiche inserita nel mentovato Giornale. Se si giudicasse ben fatto unire anche queste Lettere alle sue Riflessioni, basta che me ne dia un cenno, ch'io glie ne spedirò tosto la copia.

Attribuisco a mia fortuna, che Ella m'abbia dato occasione di dedicarle la mia servitù, e di farmi conoscere quale ho l'onore di protestarmi.

Del centro della percossa
Dissertazione
stampata nel Tomo XXXI
della nuova Raccolta Calogeriana

Del Centro della Percossa. Dissertazione Fisico-Matematica del Signor Conte Giordano Riccati.

N. R. Tomo XXXI.

Non è mai stato, per quanto io sappia, sciolto generalmente il Problema del Centro della Percossa di un sistema di corpi, che si girano intorno ad un asse, cioè a dire di qual centro, o punto, l'urto del quale in un ostacolo fa perdere ai corpi tutta la loro velocità: Il celebre Jacopo Ermanno nella sua Foronomia pag. 109. soddisfa alla quistione nella sola circostanza, che i corpi tutti sian collocati nello stesso piano normale all'asse, intorno al quale si muovono. Anche il famoso Wallis si ristrigne alle ipotesi più facili; ed il dottissimo P. Ruggiero Giuseppe Boscovich nella sua Teorica della Filosofia Naturale pag. 157. fra tutte le supposizioni sceglie la semplicissima, prescrivendo che le masse sian collocate nella medesima linea retta, che giri intorno ad un de' suoi punti. Io principiando dalle condizioni più agevoli, mi faccio strada a determinare il centro della percossa, quando le masse, che si girano intorno ad un asse, sono in qualsivoglia modo disposte; e conciossiachè quasi egualmente si stimi e lo scoprimento della verità, e la maniera di ritrovarla, purchè sia semplice ed elegante; ho procurato di usare un metodo facile e piano, che sparga sulla materia, di cui si tratta, un lume non dispregevole: della qual cosa al discreto Lettore ne rimetto il giudicio.

Problema I.

Determinare il Centro della Percossa, quando le masse stanno tutte nella medesima linea retta, che si gira intorno ad un de' suoi punti.

Siano le masse (fig. 1.) A, B, C, D &c. connesse fra loro dalla retta PD inflessibile e priva di inerzia, che giri intorno il punto P in essa situato, e si cerchi il punto Q, il di cui moto estinguendo, resti altresì estinto ogni moto nelle dette masse, senza che tentino di fare alcun giramento intorno allo stesso punto Q.

Non seguirà verun giro, quando le velocità delle masse A, B, C, D &c. scemino in proporzione delle distanze AP, BP, CP, DP &c.

Spingasi

Del Centro della Percossa.

Spingasi con direzione normale a DP un corpo M, la cui velocità U, contro il punto Q, e nel primo istante dell'urto le velocità delle masse A, B, C, D &c. si esprimano per le distanze AP, BP, CP, DP &c. onde la somma delle quantità di moto de' nominati corpi sia $A \cdot AP + B \cdot BP + C \cdot CP + D \cdot DP$ &c., a cui si agguagli MU quantità di moto del corpo M.

Tra il punto Q, e la massa M si supponga una forza inerte, la quale reagisca da una parte, e dall'altra per minimi spazj proporzionali alle velocità QP del punto Q, U del corpo M, e ne seguirà, che le perdite di forza viva nei corpi A, B, C, D &c., e nel corpo M serberanno la ragione dei detti spazj, e sia di QP : U.

Giacchè le velocità dei corpi A, B, C, D &c. hanno da scemare in proporzione delle distanze AP, BP, CP, DP &c. si esprimano esse, passato che sia un tempo minimo dopo l'istante dell'urto, per $AP\sqrt{1-n}$, $BP\sqrt{1-n}$ &c.; e sarà la quantità di moto residua nei nostri corpi $= \overline{A \cdot AP + B \cdot BP + C \cdot CP + D \cdot DP + \&c.}\sqrt{1-n}$. La loro forza viva si troveranno $= A \cdot \overline{AP}^2 \cdot \overline{1-n} + B \cdot \overline{BP}^2 \cdot \overline{1-n} + C \cdot \overline{CP}^2 \cdot \overline{1-n} + D \cdot \overline{DP}^2 \cdot \overline{1-n}$ + &c., e la forza viva perduta $= \overline{A \cdot \overline{AP}^2 + B \cdot \overline{BP}^2 + C \cdot \overline{CP}^2 + D \cdot \overline{DP}^2 + \&c.} \cdot n$: ma questa somma deve stare alla forza viva perduta dal corpo M come QP : U; dunque si troverà la forza viva scapitata dal corpo $M = \frac{nU}{QP} \cdot \overline{A \cdot \overline{AP}^2 + B \cdot \overline{BP}^2 + C \cdot \overline{CP}^2 + D \cdot \overline{DP}^2 + \&c.}$. Si sottragga essa dalla forza primitiva MU^2, e ci si presenterà la forza viva residua $= MU^2 - \frac{nU}{QP} \cdot \overline{A \cdot \overline{AP}^2 + B \cdot \overline{BP}^2 + C \cdot \overline{CP}^2 + D \cdot \overline{DP}^2 + \&c.}$. Pongo in cambio di MU il suo valore $A \cdot AP + B \cdot BP + C \cdot CP + D \cdot DP$ + &c, e scopro la stessa forza viva residua $= U \cdot \overline{A \cdot AP + B \cdot BP + \&c.} - \frac{n}{QP} \cdot \overline{A \cdot \overline{AP}^2 + B \cdot \overline{BP}^2 + \&c.}$, dalla quale moltiplicata per M, ed indi fatta l'estrazione della radice, ne risulta la quantità di moto residua nel detto corpo $= \sqrt{MU \cdot \overline{A \cdot AP + B \cdot BP + \&c.} - \frac{n}{QP} \cdot \overline{A \cdot \overline{AP}^2 + B \cdot \overline{BP}^2 + \&c.}}$.

Se il corpo M ha da estinguere tutto il moto nei corpi A, B, C, D &c., bisogna che la quantità di moto residua in quello ed in questi sian sempre uguali, dimodochè e l'una, e l'altra nel medesimo istante si annullino. Sarà pertanto

$$\sqrt{MU \cdot \overline{A \cdot AP + B \cdot BP + \&c} - \frac{n}{QP} \cdot \overline{A \cdot \overline{AP}^2 + B \cdot \overline{BP}^2 + \&c.}} = \overline{A \cdot AP + B \cdot BP + \&c.}\sqrt{1-n}$$

Alzo il tutto al quadrato, e fatta la divisione per le quantità uguali MU, $A \cdot AP + B \cdot BP$ + &c., e adempiute poscia le necessarie operazioni,

trovo

trovo finalmente $QP = \frac{A.\overline{AP}^2 + B.\overline{BP}^2 + \&c.}{A.AP + B.BP + \&c.}$, ed imparo essere lo stesso il centro di percossa, e di oscillazione.

Si osservi, che svanendo nella formola la specie n indice della forza viva perduta dalle masse A, B, C, D, &c., il sito del punto Q è sempre costante, qualunque sia il valore di n, e perciò anche quando $n=1$, e le dette masse sono ridotte in quiete. Le conclusioni da me dedotte vagliono per i tempicelli secondo, terzo, quarto &c., durante i quali seguono le variazioni della forza media, e conseguentemente per la somma di esse variazioni, quando vi ha un valore finito.

Svaniscono parimente dalla formola le specie M, U; e quindi debbe rilevarsi, che salvo il valore della quantità di moto $MU = A.AP + B.BP + \&c.$, si può assegnare alla massa M qualunque grandezza anche infinita: ma un ostacolo immobile equivale ad una massa infinita; dunque Q è il centro della percossa ancora quando il sistema dei corpi A, B, C, D &c. urta in un ostacolo immobile.

Scolio I.

Il nostro Problema si riduce a trovare il sito Q, e la massa m animata dalla velocità QP nel detto sito conveniente, che paragonata col sistema di masse A, B, C, D &c. sia fornita della stessa forza viva, e della stessa quantità di moto. Le due condizioni mi somministrano le formole $m.\overline{QP}^2 = A.\overline{AP}^2 + B.\overline{AP}^2 + C.\overline{CP}^2 + D.\overline{DP}^2 + \&c.$, ed $m.QP = A.AP + B.BP + C.CP + D.DP + \&c.$, e dividendo la prima per la seconda, ne risulta il già ritrovato valore di $QP = \frac{A.\overline{AP}^2 + B.\overline{BP}^2 + \&c.}{A.AP + B.BP + \&c.}$, che mi insegna essere $m = \frac{\overline{A.AP + B.BP + \&c.}^2}{A.\overline{AP}^2 + B.\overline{BP}^2 + \&c.}$. Questa massa sarebbe perfettamente equivalente alle masse A, B, C, D &c., siccome quella, che urtata dal corpo M colla quantità di moto $MU = m.QP$, perderebbe in pari tempo la medesima forza viva, e la medesima quantità di moto discapitata dalle masse A, B, C, D &c.; ma la massa m colpita dal corpo M resta senza alcun moto; dunque lo stesso effetto succederà anche nei corpi A, B, C, D &c.

Scolio II.

Sia G il centro della percossa in riguardo alle masse A, B, onde s'abbia $\frac{A.\overline{AP}^2 + B.\overline{BP}^2}{A.AP + B.BP} = GP$, e si troverà $AG = GP - AP =$

B.BP

$\frac{B\cdot BP\cdot\overline{BP-AP}}{A\cdot AP+B\cdot BP}=\frac{B\cdot BP\cdot AB}{A\cdot AP+B\cdot BP}$, e $BG=BP-GP=\frac{A\cdot AP\cdot\overline{BP-AP}}{A\cdot AP+B\cdot BP}=\frac{A\cdot AP\cdot AB}{A\cdot AP+B\cdot BP}$. Sarà pertanto $AG : BG :: B\cdot BP : A\cdot AP$, cioè in ragione reciproca delle quantità di moto $A\cdot AP$, $B\cdot BP$, e per conseguenza $A\cdot AP\cdot AG = B\cdot BP\cdot BG$, o sia $A\cdot AP\cdot AG - B\cdot BP\cdot BG = 0$, e G si potrà chiamare il centro delle quantità del moto dei corpi A, B.

Non altrimenti posto Q il centro della percossa delle masse A, B, C, D &c., si troverà $A\cdot AP\cdot AQ + B\cdot BP\cdot BQ - C\cdot CP\cdot CQ - D\cdot DP\cdot DQ \pm$ &c. $= 0$, e Q sarà il centro delle quantità del moto dei corpi A, B, C, D &c. Il calcolo è alquanto lungo, ma non difficile.

Scolio III.

Io mi immagino in A una forza f, la quale venendo per lo spazio ds proporzionale alla velocità u del corpo A, cagioni in esso la perdita di forza viva $Audu$, onde si abbia $fds = -Audu$. Ho avvertito di sopra essere la velocità perduta $-du$ proporzionale ad u: ma anche lo spazio scorso ds è proporzionale ad u; dunque ds come $-du$, e conseguentemente f come $Au = A\cdot AP$. Collo stesso discorso proverò, che le forze atte a scemare proporzionatamente, e finalmente ad estinguere la velocità nei corpi B, C, D &c. serbano la ragione delle quantità di moto $B\cdot BP$, $C\cdot CP$, $D\cdot DP$ &c. Ora collocato un ostacolo in Q centro della quantità di moto, o sia delle forze, non può intorno ad esso seguire alcun giro; perchè in riguardo al mentovato giro dovendo agire le forze $A\cdot AP$, $B\cdot BP$, $C\cdot CP$, $D\cdot DP$ &c. per ispazj proporzionali alle distanze AQ, BQ, CQ, DQ &c., le azioni positive uguagliano le negative, e si impediscono mutuamente, come ci viene chiaramente indicato dalla equazione $A\cdot AP\cdot AQ + B\cdot BP\cdot BQ - C\cdot CP\cdot CQ - D\cdot DP\cdot DQ \pm$ &c. $= 0$.

Giacchè dunque la linea DP non può girarsi intorno al punto Q, egli è lo stesso per ridurre alla quiete i corpi A, B, C, D &c., o l'applicare le ritrovate forze nei punti A, B, C, D &c.; o unirle tutte nel centro Q; perchè esercitandosi in ambo i casi la stessa somma di reazioni, dee parimente seguire lo stesso effetto. La somma delle azioni delle forze adattate ai punti A, B, C, D &c. si uguaglia ad $A\cdot\overline{AP}^2 + B\cdot\overline{BP}^2 + C\cdot\overline{CP}^2 + D\cdot\overline{DP}^2 +$ &c., e l'azione delle forze $A\cdot AP + B\cdot BP + C\cdot CP + D\cdot DP +$ &c. applicate in Q pareggia

la

la quantità $\overline{A.AP} + \overline{B.BP} + \overline{C.CP} + \overline{D.DP} + \text{\&c.}\ PQ$: ma queste azioni debbono essere uguali; dunque $A.\overline{AP}^2 + B.\overline{BP}^2 + C.\overline{CP}^2 + D.\overline{DP}^2 + \text{\&c.}$ $= \overline{A.AP + B.BP + C.CP + D.DP + \text{\&c.}}\ QP$, e quindi $\dfrac{A.\overline{AP}^2 + B.\overline{BP}^2 + \text{\&c.}}{A.AP + B.BP + \text{\&c.}}$ $= QP$, ch'è il valore trovato per altra strada della distanza del centro Q della percossa dal punto P, intorno a cui si girano i corpi.

Scolio IV.

Se le masse A, B, C, D &c. si movessero con eguale velocità, farebbe d'uopo supporre AP infinita. In tal caso si avrebbe $\overline{BP}^2$ $= \overline{BA}^2 + 2BAP + \overline{AP}^2 = 2BAP + \overline{AP}^2$ adequatamente, e non altrimenti $\overline{CP}^2 = 2CAP + \overline{AP}^2$. La formola dunque prenderebbe il seguente aspetto $QP = QA + AP = \dfrac{A.\overline{AP}^2 + B.\overline{2BAP + \overline{AP}^2} + C.\overline{2CAP + \overline{AP}^2} + \text{\&c.}}{A.AP + B.\overline{BA + AP} + C.\overline{CA + AP} + \text{\&c.}}$ o sia effettuata la divisione, $QA + AP = AP + \dfrac{B.BAP + C.CAP + \text{\&c.}}{A.AP + B.\overline{BA+AP} + C.\overline{CA+AP} + \text{\&c.}}$ e finalmente $QA = \dfrac{B.BA + C.CA + \text{\&c.}}{A + B + C + \text{\&c.}}$

Problema II.

Determinare il Centro della Percossa, quando le masse sono collocate nello stesso piano normale all'asse, intorno a cui si fa il giro.

Le masse A, B &c. (Fig. 2.) siano collocate nel piano APB normale all'asse, che passa pel punto P, intorno a cui girano; si cerca il centro Q della percossa. Due cose si debbono determinare, cioè la posizione della linea PQ, nella quale dee star esso centro, e la distanza PQ.

Sia PQ la linea cercata, a cui si tirino le normali AA', BB', e supposto che AE, BG siano due archetti descritti coi raggi PA, PB dai corpi A, B; le velocità dei nominati corpi, le quali eseguiscano la proporzione degli archi suddetti, si risolvano in due ZE, AZ; AH, HG, una parallela, e l'altra normale a PQ: L'ostacolo MQ non si oppone alla velocità parallela alla linea PQ; e perciò se ha da estinguere tutto il moto, egli è d'uopo che i corpi A, B &c. si impediscano mutuamente di moversi per la direzione QP, ovvero PQ. Essendo AE : ZE :: AP : AA', AG : BH : BP : BB' &c., e le velocità dei corpi in ragione dei raggi AP, BP &c., ne segue che le velocità per le direzioni ZE, BH &c. ricevano la proporzione AA' : BB' &c. Acciocchè dunque si estingua il moto per la direzione parallela a QP, egli è necessario, che si adempia l'equazione

A.AA'

$A.AA' = B.BB'$, e che per conseguenza la linea PQ passi pel centro della massa A, B &c. …

Stabilita la posizione della linea PQ, determiniamo il sito del punto Q. Le velocità dei corpi A, B &c., che si possono esprimere per raggi AP, BP &c., si risolvono nelle due AA', $A'P$; BB', $B'P$ &c. ma AA', BB' &c. dinotano, come abbiamo veduto, le velocità parallele a PQ; dunque l'altre $A'P$, $B'P$ &c. indicano le velocità normali a PQ. Quindi avremo la quantità di moto dei corpi A, B &c. per la direzione $AA' = A.A'P + B.B'P + \&c.$ Spingasi contro il punto Q un corpo M, la cui quantità di moto $MU = A.A'P + B.B'P + \&c.$, e fra Q ed M ci stia una forza media, che reagisca da entrambe le parti per infinitesimi spazj proporzionali alle velocità QP del punto Q, U del corpo M, ed interverrà, che gli scapiti di forza viva nei corpi A, B &c., e nel corpo M si corrisponderanno nella proporzione delle mentovate velocità.

Dovendo la velocità dei corpi A, B &c. scemare, come sopra ho notato, in ragione delle distanze AP, BP &c., vengano esse indicate un minimo tempo dopo il cominciamento dell'urto per $AP\sqrt{1-n}$, $BP\sqrt{1-n}$ &c., e non altrimenti le velocità normali a PQ per $A'P\sqrt{1-n}$, $B'P\sqrt{1-n}$ &c., onde per la direzione AA' resti la quantità di moto $\overline{A.A'P + B.B'P + \&c.}\,\sqrt{1-n}$. La forza viva residua nei corpi la scopriremo $\overline{A.\overline{AP}^2 + B.\overline{AP}^2 + \&c.}\,.\,\overline{1-n}$, e conseguentemente la forza viva perduta $\overline{A.\overline{AP}^2 + B.\overline{AP}^2 + \&c.}\,.\,n$: e conciossiachè questo aggregato abbia da riferirsi alla forza viva perduta dal corpo M in proporzione di $QP : U$, ci si presenterà la forza viva discapitata dal corpo $M = \frac{nU}{QP}\,.\,\overline{A.\overline{AP}^2 + B.\overline{BP}^2 + \&c.}$ Sottro una tal forza dalla primitiva MU^2, e trovo la restante forza viva $= MU^2 - \frac{nU}{QP}\,.\,\overline{A.\overline{AP}^2 + B.\overline{BP}^2 + \&c.}$, e sostituendo in vece di MU il suo valore $\overline{A.A'P + B.B'P + \&c.}$, scopro la mentovata forza viva residua $= U.\overline{A.A'P + B.B'P + \&c.} - \frac{n}{QP}\,.\,\overline{A.\overline{AP}^2 + B.\overline{AP}^2 + \&c.}$. La moltiplico per M, e adempiuta l'estrazione della radice, ho la rimanente quantità di moto $= \sqrt{MU\,.\,\overline{A.A'P + B.B'P + \&c.} - \frac{n}{QP}\,.\,\overline{A.\overline{AP}^2 + B.\overline{BP}^2 + \&c.}}$.

Se il corpo M dee far isvanire tutto il moto nei corpi A, B &c., egli è d'uopo che la residua quantità di moto per la medesima direzione normale a QP in questi, ed in quello siano sempre uguali, di maniera che si annullino nello stesso momento. Avremo

dunque

dunque $\sqrt{MU\cdot A\cdot A'P + B\cdot B'P + \&c. - \frac{n}{QP}\cdot A\cdot\overline{AP}^2 + B\cdot\overline{BP}^2 + \&c.} = \overline{A\cdot A'P + B\cdot B'P + \&c.}\sqrt{1-n}$, e sostituendo in luogo di MU il suo valore, ed effettuate le convenienti operazioni, $QP = \frac{A\cdot\overline{AP}^2 + B\cdot\overline{BP}^2 + \&c}{A\cdot A'P + B\cdot B'P + \&c}$ come si doveva dimostrare.

Scolio I.

Anche qui si può riflettere; che il centro della percossa coincide con quello di oscillazione; che dileguandosi nella formola la massa M, che urta nel punto Q, si può ad essa assegnare qualunque valore; che supponendola infinita, equivale ad un ostacolo invincibile, nel quale percuotendo il punto Q, i corpi A, B &c. perdono tutto il moto; che il problema si riduce a stabilire il sito Q, e la massa m fornita della velocità QP, che messa al paragone col sistema di masse A, A, &c. abbia la medesima forza viva $A\cdot\overline{AP}^2 + B\cdot\overline{BP}^2 + \&c.$, e la stessa quantità di moto $A\cdot A'P + B\cdot B'P + \&c.$ per la direzione AA' normale a QP; che questa massa equivale compiutamente alle masse A, B &c.; perchè urtata dal corpo M colla quantità di moto $MU = m\cdot QP = A\cdot A'P + B\cdot B'P + \&c.$ discapiterebbe in egual tempo la medesima forza viva assoluta, e la medesima quantità di moto perduta per la direzione AA' dalle masse A, B &c., e restando essa massa, come è noto, finalmente senza alcun moto percossa dal corpo M, seguirebbe lo stesso similmente nei corpi A, B &c.

Aggiungo soltanto un'avvertenza, che tanto nel problema I. quanto nel presente le masse A, B &c., e la massa equivalente in debbono esser animate dalla stessa forza viva, ma non così dalla medesima quantità di moto assoluta. Questa circostanza favorevole alla sentenza Leibniziana ci fa toccar con mano, che l'equivalenza, la quale non sussiste senza l'eguaglianza della forza viva; può conciliarsi colla ineguaglianza fra la quantità assoluta del movimento.

Scolio II.

Posto che fosse infinita la linea $A'P$, e le linee AA', BB', $B'A'$ &c. stessero dentro i limiti del finito, si avrebbe $QP = A'P + QA' = \frac{A\cdot\overline{A'P}^2 + B\cdot\overline{A'P}^2 + 2B\cdot B'A'P + C\cdot\overline{A'P}^2 + 2C\cdot C'A'P + \&c.}{A\cdot A'P + B\cdot\overline{A'P + B'A'} + C\cdot\overline{A'P + C'A'} + \&c.}$ Si effettui la divisione, e ne risulterà dopo le necessarie operazioni $QA' =$

$B\cdot B'A'$

$\frac{B.B'A' + C.C'A' + \&c.}{A + B + C + \&c.}$, conforme si è ritrovato nel problema I. fatta la stessa supposizione di $A'P = \infty$.

Nella notata circostanza i corpi A, B, C &c. si moverebbero con eguale velocità, e per la stessa direzione AA' normale alla linea PQ, che passa pel centro della massa, ed in riguardo al centro della percossa Q, che coinciderebbe con quello della massa, egli sarebbe il medesimo, che i corpi A, B &c. stessero nei siti A, B &c., oppure nei corrispondenti A', B' &c. collocati nella linea retta PQ, richiedendo in ambo gli incontri la linea PQ lo stesso valore, e la medesima posizione.

Problema III.

<u>Determinare il Centro della Percossa, quando le masse sono situate nello stesso piano, nel quale si trova altresì l'asse, intorno a cui si fa il moto.</u>

Le masse (Fig. 31.) A, B, C &c., e l'asse RQ, intorno a cui si girano, siano collocati nello stesso piano: si cerca il centro Q della percossa. Condotte le linee AA', BB', CC' &c. normali ad RQ, ~~intorno a cui si girano~~ si scelgano due masse per esempio A, B, e si congiungano colla retta BA, che si continui finchè tagli l'asse nel punto Q. I corpi A, B in un pari tempicello scorrono spazj proporzionali ai raggi AA', BB': ma AA' : BB' :: QA : QB; dunque i detti spazj stanno anche in ragione di AQ : BQ; e conciossiachè siano minimi, si può supporre, che le masse A, B si girino intorno al punto Q. Quindi avremo pel problema I. il centro della percossa G distante dal punto Q per la linea $GQ = \frac{A.\overline{AQ}^2 + B.\overline{BQ}^2}{A.AQ + B.BQ}$. Si meni GG' normale ad RQ, e fatta la riflessione, che posta h.AA' = AQ, è parimente h.BB' = BQ, h.GG' = GQ, ci accorgeremo, che sostituiti nella ritrovata formola questi valori, si perviene alla equazione $GG' = \frac{A.\overline{AA'}^2 + B.\overline{BB'}^2}{A.AA' + B.BB'}$. Ci ha insegnato il problema I. essere AG : BG in ragione inversa delle quantità di moto dei corpi A, B, cioè come B.BQ : A.AQ, o sia come B.BB' : A.AA'. Se adunque la linea AB si dividerà nel punto G, dimodochè stia AG : BG :: B.BB' : A.AA', ed indi si tirerà la retta GG' normale ad RQ, sarà G il centro della percossa dei corpi A, B, e GG' la distanza dall'asse RQ.

Si

Del centro della percossa.

Si ponga ora in G la massa $G = \frac{\overline{A \cdot AA' + B \cdot BB'}^2}{A \cdot AA'^2 + B \cdot BB'^2}$ equivalente alle due A, B, la quale si mova colla velocità propria della distanza GG', e descritta la linea CG, che si continui sino in Z, pel problema I. si troverà il centro della percossa H col mezzo dell'equazione $HZ = \frac{G \cdot GZ^2 + C \cdot CZ^2}{G \cdot GZ + C \cdot CZ}$, e conseguentemente condotte normali ad RQ le rette HH', CC', $HH' = \frac{G \cdot GG'^2 + C \cdot CC'^2}{G \cdot GG' + C \cdot CC'}$, e ponendo in vece della massa G, e di GG' i loro valori, $HH' = \frac{A \cdot AA'^2 + B \cdot BB'^2 + C \cdot CC'^2}{A \cdot AA' + B \cdot BB' + C \cdot CC'}$.

Il centro H partisce la linea CG nelle due porzioni GH, CH, che stanno inversamente come le quantità di moto de' corpi G, C, vale a dire come $C \cdot CC' : G \cdot GG' = A \cdot AA' + B \cdot BB'$.

Con tal metodo procedendo, troveremo finalmente la posizione, e la distanza dall'asse RQ del centro Q della percossa di tutti i corpi A, B, C, D &c., e ne risulterà la detta distanza $PQ = \frac{A \cdot AA'^2 + B \cdot BB'^2 + C \cdot CC'^2 + \&c.}{A \cdot AA' + B \cdot BB' + C \cdot CC' + \&c.}$

Per determinare frattanto con maggior eleganza, e senza la premessa serie di operazioni l'assoluta posizione del punto Q, cerco la sua lontananza QQ'' dalla linea data C''R normale all'asse RQ. Si tirino parallele ad RQ le rette AA'', GG'', BB'', HH'', CC''. Ho notato essere $AG : GA :: A \cdot AA' : B \cdot BB'$; dunque $BG : AG + GA = BA :: A \cdot AA' : A \cdot AA' + B \cdot BB'$: ma $BG : BA :: GI : AK$; dunque $GI : AK :: A \cdot AA' : A \cdot AA' + B \cdot BB'$, e perciò posta $GI = \frac{A \cdot AA'}{h}$, sarà $AK = \frac{A \cdot AA' + B \cdot BB'}{h}$. Ciò premesso, dico essere $\frac{A \cdot AA' \cdot AA'' + B \cdot BB' \cdot BA''}{A \cdot AA' + B \cdot BB'} = GG''$. In fatti $AA'' = AK + KA'' = \frac{A \cdot AA' + B \cdot BB'}{h} + BB''$, $GG'' = GI + IG'' = \frac{A \cdot AA'}{h} + BB''$. Sostituito in cambio di AA'' il suo valore, troveremo

$$\frac{A \cdot AA' \cdot \overline{\frac{A \cdot AA' + B \cdot BB'}{h} + BB''} + B \cdot BB' \cdot BB''}{A \cdot AA' + B \cdot BB'} = GG'',$$ o sia

$$\frac{\overline{A \cdot AA' + B \cdot BB'} \cdot BB'' + \overline{A \cdot AA' + B \cdot BB'} \cdot \frac{A \cdot AA'}{h}}{A \cdot AA' + B \cdot BB'} = \frac{A \cdot AA'}{h} + BB'' = GG'',$$

che è il vero valore di questa linea.

Collo stesso metodo proverò la verità della formola $\frac{G \cdot GG' \cdot GG'' + C \cdot CC' \cdot CC''}{G \cdot GG' + C \cdot CC'} = HH''$, e surrogando in luogo di $G \cdot GG'$ il suo valore $A \cdot AA' + B \cdot BB'$, e in luogo di $G \cdot GG' \cdot GG'' = \overline{A \cdot AA' + B \cdot BB'} \cdot GG''$ il suo valore $A \cdot AA' \cdot AA'' + B \cdot BB' \cdot BB''$, mi si presenterà

A

Del Centro della Percossa.

$$\frac{A\cdot AA'\cdot AA'' + B\cdot BB'\cdot BB'' + C\cdot CC'\cdot CC''}{A\cdot AA' + B\cdot BB' + C\cdot CC'} = HH''.$$

Ella è agevole da cavarsi la conseguenza dover essere $QQ'' = \frac{A\cdot AA'\cdot AA'' + B\cdot BB'\cdot BB'' + C\cdot CC'\cdot CC'' + \&c.}{A\cdot AA' + B\cdot BB' + C\cdot CC' + \&c.}$ Tagliata pertanto la linea RP uguale ad una tale lunghezza, e la linea $RQ'' = \frac{A\cdot \overline{AA'}^2 + B\cdot \overline{BB'}^2 + C\cdot \overline{CC'}^2 + \&c.}{A\cdot AA' + B\cdot BB' + C\cdot CC' + \&c.}$, si compia il rettangolo RQ'', e sarà Q il centro della percossa rispettivamente all'aggregato di masse A, B, C &c. collocate nello stesso piano, nel quale si trova altresì l'asse RO, intorno a cui si fa il giro: il che &c.

Scolio.

Fingasi che stando le rette A''B'', A''C'' dentro i confini del finito, divenga $AA' = \infty$, e movendosi i corpi A, B, C &c. con uguale velocità, si scoprirà $PQ = AA' + NQ =$
$$\frac{A\cdot \overline{AA'}^2 + B\cdot \overline{AA'}^2 + 2B''A''\cdot AA' + C\cdot \overline{AA'}^2 + 2C''A''\cdot AA' + \&c.}{A\cdot AA' + B\cdot \overline{AA' + B''A''} + C\cdot \overline{AA' + C''A''} + \&c.} =$$
$$AA' + \frac{B\cdot B''A''\cdot AA' + C\cdot C''A''\cdot AA' + \&c.}{A\cdot AA' + B\cdot AA' + C\cdot AA' + \&c.}$$, e conseguentemente $NQ = \frac{B\cdot B''A'' + C\cdot C''A'' + \&c.}{A + B + C + \&c.}$ Avremo inoltre $QQ'' =$
$$\frac{A\cdot AA'\cdot AA'' + B\cdot BB''\cdot \overline{AA' + B''A''} + C\cdot CC''\cdot \overline{AA' + C''A''} + \&c.}{A\cdot AA' + B\cdot \overline{AA' + B''A''} + C\cdot \overline{AA' + C''A''} + \&c.} =$$
$$\frac{A\cdot AA'' + B\cdot BB'' + C\cdot CC'' + \&c.}{A + B + C + \&c.}$$ Col mezzo delle premesse due formole si stabilisce il centro della percossa, quando le masse collocate nello stesso piano si muovono con uguale velocità, la cui direzione è normale al piano mentovato.

Problema IV.

Disposte in qualsivoglia modo più masse, che si girano intorno ad un asse, trovare il Centro della Percossa.

Le masse (Fig. 4.) A, A &c. ordinate in qualunque maniera si girino intorno all'asse RO, si cerca il centro Q della percossa. Dal centro delle nominate masse, e per l'asse RO passi un piano RS, e pel centro particolare di ciascuna massa A, B &c. passino altrettanti piani normali all'asse RO, e conseguentemente anche al piano RS, e siano le comuni sezioni di questo, e di quelli A'P, B'P &c., che formeranno angoli retti con RO. Dai centri dei corpi A, B &c. si menino alle dette sezioni le normali

AA'

AA', BA' &c. Questi piani si fingano solidi ma non gravi, ed immobilmente fra loro connessi.

Se il centro della percossa Q sia talmente collocato, che tirata QP normale ad RQ, e parallela ad A'P, B'P &c., il piano RS non si giri intorno all'asse PQ, o siano i corpi A, B &c. collocati nello stesso piano normale ad RQ, o in differenti piani APA', BPB' &c., si troverà la medesima distanza $PQ = \frac{A\cdot\overline{AP}^2 + B\cdot\overline{BP}^2 + \&c.}{A\cdot A'P + B\cdot B'P + \&c.}$ del centro della percossa Q dall'asse RQ in ambo i casi, servendo all'uno e all'altro il filo di discorso da me usato nel problema II.

Resta da determinarsi la lontananza della linea PQ da un'altra retta RQ'' normale ad RQ, che sia data di posizione; acciocchè il piano RS non si giri intorno all'asse PQ. Le velocità A'P, B'P &c. perpendicolari al piano RS, di cui vanno forniti i corpi A, B &c., sono quelle, che possono cagionare il giro intorno all'asse PQ. Ricorrendo al problema III. impariamo, che non succederà esso giro, quando condotte A'A'', B'B'' &c. QQ'' parallele ad RQ, si adempia l'equazione $\frac{A\cdot A'P\cdot A'A'' + B\cdot B'P\cdot B'B'' + \&c.}{A\cdot A'P + B\cdot B'P + \&c.} = QQ''$. Se adunque Q''Q abbia il suddetto valore, ed inoltre si tagli $PQ = \frac{A\cdot\overline{AP}^2 + B\cdot\overline{BP}^2 + \&c.}{A\cdot A'P + B\cdot B'P + \&c.}$, sarà Q il centro della percossa rispettivamente ai corpi A, B &c. in qualsivoglia modo disposti, che si girano intorno all'asse RQ: il che &c.

Scolio.

Posta $A'P = \infty$, ed essendo finita la linea B''A'' &c., troveremo come nel problema II. $NQ = \frac{B\cdot B''A'' + \&c.}{A + B + \&c.}$, e come nel problema III. $QQ'' = \frac{A\cdot A'A'' + B\cdot B'B'' + \&c.}{A + B + \&c.}$, e ci accorgeremo, che il centro della percossa si unisce con quello della massa.

Lettera

al Sig.r Ab.e Giambatista Nicolai Professore d'Analisi nell'Università di Padova, in cui nuovamente si difende dalla nota di petizion di principio la formola, colla quale il Cav. Newton determina la velocità della propagazione del suono per l'aria. Leggesi nel Tomo XII. pag. 320 del Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia. Modena

= ou

Lettera del Sig. Co. Giordano Riccati al Sig. Arcip. Giambattista Nicolai Professore di Analisi nella Università di Padova, in cui nuovamente si difende dalla nota di petizion di principio la formola, colla quale il Cav. Newton determina la velocità della propagazione del suono per l'aria.

Leggesi nel Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia, che si stampa in Modena, Tomo XII. num.° XI. pag. 320.

Avendo Ella letto, Sig. Arcip. Riveritissimo, le Effemeridi di Roma num. XLIX. e la Gazzetta Letteraria di Milano num. II. dell'anno 1776, nelle quali si riferisce, che da gran tempo il celebre P. Frisi avea dimostrato il paralogismo della dimostrazione di Newton riguardo alla propagazione equabile del suono, e che ora nella seconda Parte della Cosmografia Fisico-Matematica risponde alle mie opposizioni; mi comanda di esporle in che consistano queste risposte, sembrando a lei evidenti le ragioni da me allegate in difesa del Newton.

Accingendomi a servirla colla possibile brevità, comincio dall'avvertire, aggiungersi dalla Gazzetta di Milano, che rovesciando il P. Frisi l'ordine della ricerca ordinaria, ritrova prima con calcolo molto semplice la velocità del suono, e poi ne inferisce l'equabilità, come un corollario della formola precedente. Nella Dissertazione I. dello Schediasma VIII. pag. 171., chiamata a l'altezza del mercurio nel barometro, G la sua densità, g la densità dell'aria, t il tempo impiegato dal suono nel viaggiare per lo spazio x, y lo spazio scorso dalla particella, la cui massa gdx, nell'atto di vibrarsi con qualsivoglia legge, e u la velocità della stessa corrispondente allo spazio y, ed avendo prima dimostrato la forza acceleratrice d'essa particella $= \frac{aGddy}{gdx^2}$, pervengo alla formola $\frac{aGddy}{gdx^2}.dt = du$. Se mi fossi servito della formola ridotta alla misura conosciuta dall'Ab. Vincenzo mio fratello nella Lettera X. sopra i principj della Meccanica, avrei trovato, nominando ε lo spazio scorso da uno de' nostri gravi in un minuto secondo, ch'esprimo per k, $\frac{2\varepsilon aGddy}{kgdx^2}.dt = du$

$= du$: ma $du = k\frac{ddy}{dt}$; dunque $\frac{2EaG\,ddy}{kg\,dx^2} \cdot dt = k\frac{ddy}{dt}$, e per conseguenza $\frac{2EaG}{k^2g} \cdot dt^2 = dx^2$, ed estraendo la radice $\sqrt{\frac{2EaG}{k^2g}} \cdot dt = \pm dx$. Passo all'integrazione senza l'~~ajutant~~ aggiunta della costante, perchè suppongasi, che ad $x = 0$ corrisponda $t = 0$, e mi si presenta $\sqrt{\frac{2EaG}{k^2g}} \cdot t = \pm x$, ossia $\sqrt{\frac{2EaG}{k^2g}} = \pm \frac{x}{t}$.

Ci manifesta la nostra formola, che la velocità del suono non dipende nè dalla legge, con cui si vibrano le particelle aeree, nè dallo spazio minore o maggiore, per cui rendendo un suono piano o forte si muovono, nè dal tempo più breve o più lungo impiegato a percorrerlo, nel quale l'acutezza e la gravità del suono consiste, ma soltanto dalla quantità $\sqrt{\frac{2EaG}{k^2g}}$; che essa velocità è equabile, stando costantemente lo spazio scorso come il tempo speso a passarlo; e che finalmente il suono ugualmente si diffonde e dalla parte dello spazio x positivo, e per la direzione contraria.

Da poscia transito il dottissimo P. Frisi ad annumerare parecchi rinomati Autori, che hanno creduto falso, sospetto, ed oscuro il metodo Newtoniano, e nota ancor egli il difetto della dimostrazione del Newton. Avendo questi assunto, che le particelle tutte del mezzo elastico si agitano colla legge di un pendolo cicloide, investigò cosa dovesse seguire da tale ipotesi, e trovò le forze acceleratrici di qualunque particella dover essere proporzionali alle distanze dal punto medio della vibrazione. Unendosi in un solo questi due principj, e non potendosi ottenere le oscillazioni a guisa di un pendolo, se le forze acceleratrici non siano proporzionali agli spazj, che restano da percorrersi, questa maniera di dimostrazione è una schietta petizion di principio.

Il P. Frisi avrebbe piena ragione, se il Newton avesse raziocinato così: le particelle si vibrano colla legge di un pendolo cicloidale; dunque le forze acceleratrici stanno come le distanze dal punto medio della vibrazione. Il celebre Inglese frattanto per determinare la legge delle forze acceleratrici ricorre ad un altro principio, cioè a dire alla cospirazione, che nasce nelle particelle aeree, supposto che si vibrino per eguali spazj, e da essa deduce la detta legge, e trovandola confacente al moto supposto, conchiude potersi l'aria vibrare non altrimenti

che

che un pendolo in cicloide, come realmente si vibra.

Applicato il metodo Newtoniano alle due ipotesi, che propagandosi il suono per linee o raggi, le particele si vibrino per minori spazj, secondochè sono più rimote dal centro sonoro o pure che la propagazione si faccia per settori sferici; se il metodo stesso peccasse di petizion di principio, si dovrebbero sempre trovare le forze acceleratrici come gli spazj da percorrersi sino alla metà della vibrazione: ma facendosi anche qui uso della compressione delle particole, ci si presenta una diversa legge di forza; dunque non possiamo incolpare di petizion di principio il metodo nominato.

Ora come risponde il chiarissimo P. Frisi a questo, se non prendo errore, dimostrativo argomento? Ecco le sue parole. *Quibus exemplis, atque inductionibus nescio, an vis Newtoniana demonstrationis restitui possit. In casu enim sectorum sphæricorum, spatiorumque decrescentium, nec particulæ aeris vibrantur ad modum penduli, nec vires acceleratrices sunt spatiis percurrendis proportionales: et ubi etiam assumatur vibrationis legem in particulis ipsis, et penduli eamdem esse, quæ alia problemati admisceantur conditiones vetant ne eadem producat ratio virium, ac distantiarum.* Se tali risposte siano contrarie, o favorevoli al Newton, ne lascio a Lei il giudicio Sig. Professore stimatissimo. Il metodo del grande Inglese consiste nel supporre, che le particole si vibrino a modo di un pendolo, e nel passar poi a cercare la legge della forza, data la circostanza. Nelle ipotesi dei settori sferici, o degli spazj decrescenti, non ne risultano forze adattate al moto supposto, ed esso è perciò impossibile: ma questa contrarietà appunto fra il moto che si suppone, e la forza mostra, che il metodo non cade in petizion di principio, la quale, come di sopra ho avvertito, dovrebbe sempre determinare le forze acceleratrici proporzionali agli spazj, che restano da percorrersi sino al punto medio della vibrazione.

Queste poche riflessioni, che ho scritte per obbedir Lei Sig. Arciprete riveritissimo, le deve concepire congiunte con quelle

stimatissima

preziosissima istoria, che se vanto pel dottissimo P. Tosi, il quale colle Opere sue profonde, e moltiplici fa tanto onore all'Italia.

I

Lettera del Sig.r Co. Giordano Riccati al Chiariss. Sig.r Co. Girolamo Fenaroli, nella quale s'indaga l'artifizio, di cui si serve la Natura per far sì, che incitata una corda al suono, s'addatti in brevissimo tempo ad una curva bilanciata, ed isocrona. È contenuta nel Nuovo Giornale Tom. XIII. num. III. pag. 62.

Lettera del Sig. Co. Giordano Riccati al Chiarissimo Sig. Co. Girolamo Zanarelli, nella quale si indaga l'artifizio, di cui si serve la Natura per far sì, che incitata una corda al suono, si adatti in brevissimo tempo ad una curva bilanciata, ed isocrona. È contenuta nel Nuovo Giornale Tomo XIII. num. III. pag. 82.

La precedente mia lettera a Lei diretta, Stimatissimo Sig. Conte, mi hanno fatto nascere in mente il pensiero di indagare l'artifizio, di cui la Natura si serve per far sì, che incitata una corda al suono, si adatti in brevissimo tempo ad una curva bilanciata, ed isocrona. Un'impresa così difficile richiedeva, ch'io dessi principio alla mia ricerche considerando il caso più semplice, quando cioè una penna applicata al punto medio C (Fig. 1.) della corda AA la fa prendere la figura angolare AXB. Ho dunque presa risoluzione di comunicarle, Sig. Co. Riveritissimo, la serie dei miei pensamenti, che se sarà da Lei approvata, crederò di non essermi ingannato, e si aumenterà in me il coraggio di inoltrarmi ad indagazioni più astruse.

Col raggio $CZ = c$ descritto il quadrante ZLf, $fZ = b$, sia la saetta $CX = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Posta $AA = L$, sarà $BX = \sqrt{(\frac{L^2}{4} + \frac{b^2}{2})} = \frac{L}{2} + \frac{b^2}{2L}$, supponendosi b minima in riguardo ad L, è conseguentemente $BXA = L + \frac{b^2}{L}$. Il perchè la corda ACA è stata allungata dalla penna per la misura $\frac{b^2}{L}$.

Passi pel punto Z la curva isocrona ADZA di un ventre solo, e sia l'assissa $BH = x$, il suo incremento $HK = dx$, l'ordinata $HD = y$, $KQ = y + dy$, e delineate DQ, QL parallele a BA, si tirino le ordinate al circolo Qg, Ly. Si ponga inoltre $BD = s$, $DQ = ds$. Ho dimostrato nello Schediasma IV. Della corda, ovvero fibra elastica avverarsi la formola $dx = \frac{Lc\,dy}{2b\sqrt{(c^2-y^2)}}$, e quindi avremo $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(\frac{L^2c^2}{4b^2(c^2-y^2)} + 1)} \cdot dy$: ma essendo b, c, y minime rispettivamente ad L, la detta radice $= \frac{Lc}{2b\sqrt{(c^2-y^2)}} + \frac{b\sqrt{(c^2-y^2)}}{Lc}$; dunque $ds = \frac{Lc\,dy}{2b\sqrt{(c^2-y^2)}} + \frac{b\,dy\sqrt{(c^2-y^2)}}{Lc}$, ed integrando $s = \frac{L}{2b} \cdot fQ + \frac{b}{Lc} \cdot fQgC$. Ora quando $s = BZ$, $fQ - fZ = b$, $fQgC = fQZC = \frac{bc}{2}$; dunque $BQZ = \frac{L}{2} + \frac{b^2}{2L}$, e per conseguenza $BQZA = L + \frac{b^2}{2}$.

Si

Si inferisca, che ripetuta la curva BDZA nel sito AMNOA, sarà essa isoperimetra alla corda AXA, essendo BXA = AMNOA $= L + \frac{b^2}{L}$.

Se conformata la corda alla curva ADZA, faccia una mezza vibrazione, le velocità de' suoi varj punti, giunti che siano alla linea retta ACA, hanno da stare come le relative ordinate. Sia u la velocità del punto Z pervenuto in C, e facendo $c : y :: u : \frac{uy}{c}$, il quarto termine dinota la velocità del punto D arrivato in H. Chiamata M la massa della corda, all'elemento De tocca la porzione di massa $= \frac{M dx}{L}$. Per la qual cosa sarà esso fornito della forza viva $= \frac{M dx}{L} \cdot \frac{u^2 y^2}{2c^2} = \frac{Mc\,dy}{2b\sqrt{(c^2-y^2)}} \cdot \frac{u^2y^2}{2c^2} = \frac{Mu^2}{4cb} \cdot \frac{y^2 dy}{\sqrt{(c^2-y^2)}}$. Faccio $\sqrt{(c^2-y^2)} = z$ $= QC$, e per conseguenza $y^2 = c^2 - z^2$; $ydy = -zdz$; $y = \sqrt{(c^2-z^2)}$: effettuate le sostituzioni, averemo la detta forza viva $= \frac{Mu^2}{4cb}\sqrt{(c^2-z^2)} \cdot -dz$ $= \frac{Mu^2}{4\cdot cb} y \cdot -dz = \frac{Mu^2}{4\cdot cb} \cdot QHy$, ed integrando, troveremo la forza viva della porzione di corda $BD = \frac{Mu^2}{4\cdot cb} \cdot \int Qy$. Si deduca eguagliarsi la forza viva della semicorda BDZ ad $\frac{Mu^2}{4\cdot cb} \cdot \frac{cb}{2} = \frac{Mu^2}{8}$, e perciò quella della corda intera ADZA ad $\frac{Mu^2}{4}$.

Essendosi accorciata la corda BDZA per $\frac{b^2}{L}$, quando è giunta alla linea retta BCA; la tensione P di essa corda ha esercitata l'azione $\frac{Pb^2}{L}$. Averemo pertanto (servendomi della formola ridotta alla misura conosciuta dall'Abate Vincenzo mio fratello nella Lettera X. sopra i Principj della Meccanica, e chiamando E lo spazio scorso da uno de' nostri gravi vicino alla superficie della terra in un minuto secondo, che esprima per K) $\frac{2EPb^2}{L} = \frac{Mu^2}{4}$, e quindi $2b\frac{\sqrt{(2EP)}}{\sqrt{(ML)}} = u$ sarà la velocità del punto Z arrivato in C.

Lasciata in libertà la corda AXB, l'esperienza c'insegna, che rende il suono confacente alla sua intera lunghezza. Egli è di uopo adunque che si accomodi o alla curva isocrona d'un solo ventre; ovvero ad una curva, che si componga della predetta, e di altra curva isocrona di più ventri, sopra di che veggasi l'Appendice al sopra citato Schediasma IV. Cerchiamo pertanto quali curve isocrone di più ventri si possano ammettere, ed in qual maniera la corda si adatti alla curva isocrona o semplice, o composta.

Essendo AX = BX, e l'angolo A uguale all'angolo B, ne nasce per necessaria illazione, che la corda AXB si ha da ripiegare in

una

una curva formata da due rami simili ed uguali collocati uno a destra, e l'altro a sinistra della linea CX: e perché ciò si verifica e dalla curva isocrona di un solo ventre AMNOA, e dalla curva composta colla mantovata, e con quelle di ventri impari, queste soltanto saranno le curve, alle quali si può accomodare la nostra corda. Hanno esse la comune proprietà, che tutti i loro punti pervengono nello stesso istante alla linea retta ACB.

Da principio dalla curva isocrona di un solo ventre, e se questa viene prescelta dalla corda AXA, egli è necessario, che passata al di là della retta ACA, si trovi ripiegata nella curva ADZA isoperimetra; imperciocché essendo seguita una reazione $\frac{Pb^2}{L}$ uguale all'azione $\frac{Pb^2}{L}$, la corda si deve trovare ridotta in questa nel sito ADZA. Per ottenere ciò fa dimostrare, che tutti i punti della corda siano giunti alla retta ACB nel medesimo momento, dove siano forniti della velocità $\frac{2by}{c}\sqrt{(\frac{2EP}{ML})} = u$, dimodoché al punto medio C competa la velocità $= 2b\sqrt{(\frac{2EP}{ML})}$. Vediamo in qual modo si regoli la Natura.

Per molto tempo mi sono dato a credere, che mentre il punto X scorre lo spazio XC, tutti gli altri punti si accostassero sempre alla linea retta ACB. Pongo all'esame una tale supposizione. Nel primo istante del moto il solo punto X è dotato di forza, che lo spinge per la direzione XC, e tutti gli altri punti ne sono privi, essendo rette le linee XB, XA. La grandissima rigidità naturale, di cui sono fornite le corde sonore, fa sì che in un fisico momento il moto si comunichi da X verso A, e verso A. Quindi nel principio, e nel proseguimento del moto la forza del punto X si divide in due parti, una che accelera il punto X, e l'altra che accelera i rimanenti punti. Considerando soltanto le prime forze, che accrescono la velocità del punto X, se questa si riferissero alla forza in Z come la distanza XC, LC, ZC alla distanza ZC, gli spazj XC, ZC si scorrerebbero nello stesso tempo impiegato dalla nostra corda in mezza vibrazione, ma la velocità in C sarebbe maggior del dovere, e in cambio di uguagliarsi a $2b\sqrt{(\frac{2EP}{ML})}$, si troverebbe $= \frac{2b^2}{c\sqrt{2}}\sqrt{(\frac{2EP}{ML})} = \frac{2b^2}{c}\sqrt{(\frac{EP}{ML})}$. A cagione di ridurre la velocità in C al giusto valore, si rende necessario, che le forze in X, L, Z

stiano

stiano in minor proporzione delle distanze rispettivamente al=
la forza, onde è dotato il punto Z alla distanza ZC. Ridotta in
tal guisa la velocità in C alla bramata misura, ne segue che
lo spazio XC si passa in tempo maggiore in tempo maggiore
di quello, in cui si percorreva lo spazio ZC.

Passo alla considerazione del punto M, in cui la semicorda
XB taglia la semicurva isoperimetra AMN. Del punto M tiro
MPS parallela ad XZ. Assumendo PM = PS, se la forza in M si ugua=
gliasse alla forza in S, e lo stesso seguisse a lontananze uguali
dalla retta AB, lo spazio MP si scorrerebbe nel medesimo tem=
po che lo spazio ZC, e la velocità in P avrebbe acquistato il
giusto valore. Ed allora solo il tempo per MP pareggerebbe il
tempo per XC, quando la forza parte propria, e parte dirò così
comunicata dal punto M scemassero a tenore con discapito del=
la velocità nel punto P.

Negli altri punti fra M, e B, per esempio R, se le forze totali
sono proporzionali alle distanze dal punto H, i tempi per RH, ZC
sono uguali, ma la velocità in H cala dal competente valore. Ri
dotta la velocità al giusto, il tempo si scema, ed è per conseguen=
za minore del tempo per MP, e molto più di quello per XC.

Nella supposizione adunque, che tutti i punti della corda
si avvicinino sempre alla retta AB finché ad essa pervengano,
non si possono unire le due condizioni, che i tempi per XC,
MP, RH &c. siano uguali, e che le velocità nei punti C, P, H &c.
abbiano i valori $\frac{2by}{c}\sqrt{\left(\frac{2\varepsilon P}{ML}\right)}$; secondoché y si pone uguale alla
ordinata CZ, PS, HD &c.

Ora di quale artifizio la Natura si serve per ottenere, che
la corda AXB si accomodi, come realmente succede, ad una
curva isocrona, ed isoperimetra? Dopo moltissime attente me=
ditazioni, mi è riuscito finalmente di scoprirlo, ed io l'espongo
ben volentieri a Lei, stimatissimo Sig. Conte. Tutto quello che
dirò della semicorda BX, si applichi all'AX. Liberata la cor=
da dalla penna, la porzione XM intercetta fra il punto X, ed il
punto M, in cui si tagliano la corda XB, e la isocrona isoperime-
tra NMZB, si pone in moto, e girando intorno al punto M in=

curvandosi

curvandosi, ed accorciandosi, ben presto si adatta alla curva isocrona NM. Al contrario la porzione MA si incurva da A verso T, e nell'incurvarsi si allunga fintantoché concorda colla curva isocrona MZB. Nel principio del moto più si accorcia la parte XM di quello che si allunghi la parte MB, e seguendo un'azione maggiore della reazione, i punti della corda si accelerano. Giunta la corda esempigrazia alla positura VMTB, i suoi punti sono pervenuti alla massima velocità; perché nel tempo minimo di tanto si accorcia la porzione VM, quanto si allunga la porzione MTB, e l'infinitesima azione è compensata da una pari reazione. Calano poscia gli accorciamenti da un canto, e crescono gli allungamenti dall'altro, ed i punti della corda vengono ritardati, finché arrivata la corda nel sito NMZB, ed essendo la semicurva isocrona NMZB isoperimetra alla semicorda XB, tanto si è accorciata la parte XM, quanto si è allungata la MB, dimodoché l'effetto prodotto dall'azione resta distrutto da un'eguale reazione, e la semicorda NMZB è ridotta in quiete. Lo stesso succede anche nella semicorda NOA.

Ho detto nel numero VI. dell'Appendice allo Schediasma IV., che il passare da uno stato all'altro di quiete, è lo stesso, che il fare una vibrazione, e rendere il suono corrispondente al tempo speso nel detto passaggio: ma la corda AXB abbandonando la figura angolare, e accomodandosi alla curva isocrona AONMZB, ha fatto transito da uno stato all'altro di quiete; dunque ha effettuato una specie di vibrazione, o piuttosto bilanciamento, in cui si ha impiegato quel brevissimo tempo, che sarà da me in altra occasione determinato, il quale bilanciamento riesce all'orecchio insensibile.

Cominciano di poi le vibrazioni dirò così regolari della corda, che si trova sempre adattata ad una curva isocrona di simil natura colla AONMZB; perché ogni suo elemento è soltanto stimolato dalle forze ad esso applicate, né altera in conto alcuno il moto degli altri elementi. La dimostrazione di una tal verità si legga al numero IX. dello Schediasma IV. Lo stesso non può dirsi della curva media fra AXB, AONMZB, a cagione

che

che si dà una continua comunicazione di moto da un elemento all'altro, fintantochè si perviene alla curva equilibrata AONMZA.

Se qualcuno bramasse, che si determini il valore dell'ordinata PM comune al triangolo XBC, ed alla curva isocrona NMZB, si proceda così. Per la natura del triangolo abbiamo

XC : CA :: MD : PA

$\frac{b}{\sqrt{2}} : \frac{L}{2} :: y : x = \frac{Ly}{b\sqrt{2}}$. Si sostituisca questo valore nell'equazione $x = \frac{L}{2b}\int\frac{c\,dy}{\sqrt{(c^2-y^2)}} = \frac{L}{2b}$. Arco Rag. c Seno y, e ne nascerà $\frac{Ly}{b\sqrt{2}} = \frac{L}{2b}$. Arco Rag. c Seno y, e perciò $y\sqrt{2}$ = Arco Rag. c Seno y, vale a dire il seno PM all'arco corrispondente come $1 : \sqrt{2}$.

Le tavole dei seni suppongono il raggio è diviso in parti 10000000. Ora essendo prossimamente c : b :: 226 : 355, facciasi 226 : 355 :: 10000000 : 15707965; e si troverà $c = \frac{b}{1,5707965}$. Servendomi del metodo delle attentazione ho scoperto, che l'arco cercato è di gradi 80 minuti $1\frac{4}{9}$, il quale si agguaglia a c.1,3966839. Il seno di quest'arco è = c.0,9877540, e moltiplicandolo per $\sqrt{2} = 1,414$, ne risulta il prodotto c.1,3966842, che si adegua coll'arco predetto. Avremo pertanto PM = c.0,9877540.

Supposto il seno qQ = PM = c.0,9877540, si troverà Cq = c.0,1560193, ed il triangolo QqC = c^2.0,0770543438261. Si aggiunga il settore $CfQ = \frac{fQ \cdot fC}{2} = c^2.0,6983419500009$, e si renderà nota l'aja $fQqC = c^2.0,7753962938261$.

Di sopra ho determinato $AD = s = \frac{L}{2b} \cdot fQ + \frac{b}{2c} \cdot fQqC$. Ora AD = BZM, ed HD = qQ = PM, e sostituiti in cambio di c, fQ, fQqC i convenienti valori troveremo $BZM = L \cdot \frac{1,3966839}{3,1415930} + \frac{b^2}{L} \cdot \frac{0,7753962938261}{1,5707965} = \frac{L}{2} \cdot \frac{13966839}{15707965} + \frac{b^2}{2L} \cdot \frac{15507926}{15707965}$.
E perchè $BZMN = \frac{L}{2} + \frac{b^2}{2L}$, scopriremo $NM = \frac{L}{2} \cdot \frac{1741126}{15707965} + \frac{b^2}{2L} \cdot \frac{200039}{15707965}$.

Rivolgiamoci presentemente ad indagare la misura di XM. Per la natura del triangolo CXB abbiamo

CX : PM :: XB : MB

$\frac{b}{\sqrt{2}} : y :: \frac{L}{2} + \frac{b^2}{2L} : \frac{y\sqrt{2}}{b}\left(\frac{L}{2} + \frac{b^2}{2L}\right)$, e quindi $MB = \frac{y\sqrt{2}}{b}\left(\frac{L}{2} + \frac{b^2}{2L}\right)$.
Si cava la conseguenza essere $XM = XB - MB = \left(\frac{L}{2} + \frac{b^2}{2L}\right) \cdot \left(\frac{b - y\sqrt{2}}{b}\right)$:
$\frac{b - y\sqrt{2}}{b} = \frac{c.15707965 - c.13966839}{c.15707965} = \frac{1741126}{15707965}$; dunque

XM

$XM = \left(\frac{L}{2} + \frac{b^2}{2L}\right) \cdot \frac{1741126}{15707965}$.

Paragonando questo valore con quello di NM ci accorgeremo, che XM supera NM per la quantità $\frac{b^2}{2L} \cdot \frac{1541047}{15707965}$. Il perchè manifestamente si vede, che quando la corda XB si è conformata alla curva NMZB isoperimetra, quel punto di corda, che nel primo istante del moto era in M, accelerandosi e ritardandosi ha fatto transito in m, onde si abbia XM = Nm. L'addotta riflessione ci fa toccare con mano, che eccettuati gli estremi A, B, tutti gli altri punti della corda AXB si vibrano, mentre la stessa passa dalla figura angolare AXB alla isocrona isoperimetra AONMZB, e perciò cotal vibrazione appartiene alla corda totale.

Ridotta la corda ACB alla figura angolare AXB, applicando la penna al punto medio C, e lasciandola poscia in libertà, il suo suono non è semplice, ma composto del predominante della corda intera, e delle parti aliquote dispari della stessa corda. Per la qual cosa la curva isocrona, a cui si adatta, nasce dalla composizione di più curve semplici di ventri impari. Se per esempio la corda rendesse i soli suoni spettanti alla corda totale, ed alla sua terza parte, prenderebbe la figura da me determinata nell'Appendice allo Schediasma IV. numero III., cioè AONMZB (Fig. 2.), la quale dovrebbe essere isoperimetra alla corda AXB, e tagliarla nei punti M, O da rinvenirsi col calcolo.

La penna non suole applicarsi alla metà della corda, ma bensì ad un punto più vicino all'uno, o all'altro dei punti estremi A, B. Ciò porta il vantaggio, che col suono principale della corda si mescolano quelli delle sue parti aliquote pari. Obbligata la corda ACB (Fig. 3.) a prendere la figura angolare AXB, e lasciata poscia in libertà, concepisca i soli suoni convenienti alla sua totalità, ed alle sue due metà. Il num. II. dell'Appendice allo Schediasma IV. ci insegna, che si accomoderà alla curva AONMZB. Dovrebbe questa essere isoperimetra alla corda AXB, e la taglierebbe nei punti O, M.

L'esperienza dimostra, che una corda incitata al transito produce misti col principale moltissimi suoni proprj delle sue parti aliquote. Da ciò possiamo dedurre, che essa si adatta a

quella

quella curva isocrona composta di molte semplici, nella quale con maggiore facilità si ripiega.

Il conto, in cui sarò per tenere le riflessioni contenute nella presente lettera, dipenderà dal giudizio, che Ella ne darà veneratissimo Sig. Conte, alla cui buona grazia raccomandandomi, ho l'onore di protestarmi.

II.

Lettera del Signor Conte Giordano Riccati al Chiariss.mo Signor Conte Girolamo Fenaroli, in cui si determina l'equazione generaliss.ma delle curve bilancianti, ed isocrone. È contenuta nel Nuovo Giornale Tomo XIV. Num. XII pag. 269.

Lettera del Sig. Conte Giordano Riccati al
Chiarissimo Sig. Conte Girolamo Zanovelli, in
cui si determina l'equazione generalissima
della Curva bilanciata, ed isocrona.
È contenuta nel Nuovo Giornale Tomo XIV.
num. XII. pag. 269.

Nella Lettera, che ultimamente le ho scritta, Nobilissimo Sig. Conte, nominando più volte la curva bilanciata, ed isocrona, penso che sia necessario dichiarare distintamente il significato da me attribuito alle espressione di curva bilanciata. Io chiamo dunque curva bilanciata quella, la qual è fornita della proprietà, che le forze stimolanti le particole di essa curva per la diversione dalle ordinate, che si suppongono minima, imprimano soltanto moto alle particole, a cui sono applicate, senz'aver parte alcuna nel movimento dell'altre particole.

Trattandosi di moti diretti, e non dandosi comunicazione di moto da particola a particola, mi è concesso il valermi della formola Cartesiana, cioè a dire di applicare la forza al tempo.

La corda ACB (fig. 1.) si sia conformata alla curva $AEDB$. Sia la lunghezza $AB = L$, la massa della corda $= M$, la forza tendente $= P$, $BH = x$, $HK = dx$, $HD = y$, $KE = y + dy$. Ai due punti D, E condotte le tangenti DG, EG, si compia il parallelogrammo $DGEID$, e si tiri la linea GI, che supponendosi minima le ordinate, sarà ad esse parallela. Si prolunghino le due linee DG, KE, finchè si taglino in Z. Egli è noto essere $EZ = -\frac{1}{2} ddy$; e perchè $EZ = IG$, sarà $IG = -\frac{1}{2} ddy$. Per la legge delle forze composte avremo $DG = \frac{1}{2} dx : GI = -\frac{1}{2} ddy :: P : -\frac{P ddy}{dx}$, ch'è quella forza, che spinge la particola DE della corda per la diversione dalle ordinate. Troveremo la massa della nominata particola col mezzo dell'analogia $L : M :: dx : \frac{M dx}{L}$, il cui quarto termine esprime la detta massa. Dividendo la forza $-\frac{P ddy}{dx}$ per la massa $\frac{M dx}{L}$, ne risulta la forza acceleratrice $= -\frac{L P ddy}{M dx^2}$.

Seguito a servirmi della formola ridotta alle misure conosciute dell'Ab. Vincenzo mio fratello nella Lettera X. sopra i

principj

principj della Meccanica, chiamando E lo spazio scorso da uno de' nostri gravi vicino alla superficie della terra in un minuto secondo, che esprimo per k. La forza $-\frac{LPddy}{Mdx^2}$ nel tempicello dt accresce per du la velocità u della particola De, e si averà la formola $-\frac{2ELPddx}{Mdx^2} \cdot dt = k\,du$: ma posto costante dt, $du = -\frac{kddy'}{dt}$ (intendendo per $-ddy'$ quello spazio, che nel tempo dt si passa coll'incremento du di velocità) dunque $-\frac{2ELPddy}{Mdx^2} \cdot dt = -\frac{k^2ddy'}{dt}$; e per conseguenza $\frac{2ELPdt^2}{Mk^2dx^2} \cdot ddy = ddy'$.

Osservo, che rispettivamente alla vibrazione della particola De è dx costante: ma dt parimente si è assunta costante; dunque sarà costante il valore di $\frac{dt^2}{dx^2}$, e perciò $-ddy =$ [illegible] si riferirà in ragione di egualità allo spazio $-ddy'$, che nel tempo dt si scorre coll'incremento di velocità du, quando sia $dt : dx :: k\sqrt{M} : \sqrt{2ELP}$. Avremo pertanto $dt = kdx\sqrt{\frac{M}{2ELP}}$. Effettuata l'integrazione senz'aggiunta di costante; perchè a $t = 0$ dee corrispondere $x = 0$, troveremo $t = kx\sqrt{\frac{M}{2ELP}} = \frac{kx}{L}\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$, e quando $x = L$, $t = k\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$. Questa formola esprime il tempo del numero n di vibrazioni della corda, che oscilla intera, e divisa in parti eguali $\frac{L}{n}$. E perchè in tali inarche maggiore, producendo un suono solo, può equilibrata vibrarsi; dalla serie 1, 2, 3, 4 &c. vengono determinati i valori, che ad n posson competere, facendo la corda nel tempo tempo. $t = k\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$ una, due, tre, quattro vibrazioni &c., secondochè oscilla intera, ovvero divisa in due, tre, quattro &c. parti eguali.

Chiamata h la lunghezza di un pendolo a secondi, c il raggio del circolo, e b il quadrante, egli è noto essere $\frac{c}{2b}\sqrt{2E} = \sqrt{h}$, e per conseguenza $\sqrt{2E} = \frac{2b}{c}\sqrt{h}$. Sostituisco questo valore nella soprapposta formola, e trovo $t = \frac{kc}{2b}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$, ch'è l'espressione, di cui mi sono servito nello Schediasma IV. della mia Opera Delle Corde, ovvero Fibre elastiche, supponendo $k = 1$.

Metto in chiaro l'aggiustatezza della scoperta equazione $t = \frac{kx}{L}\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$ colle riflessioni seguenti, che riuscivanno opportune per evitare gli equivoci. Suppongasi, che nel primo istante della vibrazione la particola De fosse collocata nel sito de, e

che

che nello scorrere lo spazio dD si abbia impiegato il tempo t. Se un tal tempo sarà al tempo totale di una vibrazione come BH $= x$ a $BA = L$, avremo $t = \frac{Kx}{L}\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$, cioè il tempo speso a passare lo spazio dD proporzionale all'assissa $BH = x$. Aumentandosi lo spazio dD, cresceranno il tempo t, e l'assissa x nella stessa ragione, onde la premessa formola sempre si avveri. Postochè da t venga espresso il tempo di una vibrazione della corda AB, che si vibra divisa nel numero n di parti eguali, sarà $x = \frac{L}{n}$, e $t = \frac{K}{n}\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$. Ho detto di sopra essere dx costante rispettivamente alla vibrazione della particola DC, ed ora fa di uopo aggiugnere, che si conserva sempre tale, riferendosi in data ragione a dt, che si suppone costante, e crescendo per conseguenza l'assissa, ed il tempo nella medesima proporzione.

Mi permetta il Sig. Conte stimatissimo di confermare la verità, che i tempi siano come le assisse, con un metodo diverso, senza valermi dell'equazione $\frac{2ELP\,dt^2}{MK^2dx^2}\cdot ddy = ddy'$. Sia ACDB (Fig. 1.) la curva di un ventre solo, la cui equazione pel citato Schediasma $x = \frac{L}{nb}$. A.co R.o c Seno y. Taglio $BH = x$, e condotta $HD = y$, e la linea DN parallela a BA, che intersechi nel punto N il circolo CNFGF descritto col raggio eguale alla massima ordinata $CC = c$. Segno poscia l'ordinata al circolo $NK = y$, e pongo $CK = q$. In grazia della semplicità della dimostrazione, m'immagino collocata in F una particola di corda eguale alla particola C, e che amendue queste particole siano sollecitate dalla stessa forza per eguali spazj FF, CG: egli è certo, che tali particole si vibreranno nel tempo stesso, e che sendo la particola C isocrona alla corda ACB, si verificherà il medesimo anche della particola F. Sostituito in cambio di $\sqrt{h}$ il suo valore $\frac{c}{nb}\sqrt{2E}$, impariamo dallo Schediasma IV., che il tempo speso dalla particola F a scorrere lo spazio FK si eguaglia a $t = \frac{K}{nb}\frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{2EP}}\cdot\int\frac{-c\,dq}{\sqrt{(c^2-q^2)}}$. Ora essendo $c^2-q^2 = y^2$, $-q\,dq = y\,dy$, avremo $-\frac{dq}{y} = \frac{dy}{q}$: ma $y = \sqrt{(c^2-q^2)}$, $q = \sqrt{(c^2-y^2)}$ dunque $\frac{-dq}{\sqrt{(c^2-q^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(c^2-y^2)}}$.
Ne segue pertanto essere $t = \frac{K\sqrt{LM}}{nb\sqrt{2EP}}\cdot\int\frac{c\,dy}{\sqrt{(c^2-y^2)}} = \frac{K\sqrt{LM}}{nb\sqrt{2EP}}$. A.co R.o c Sen. y;

e

e poichè per l'equazione della curva $ACDB$ abbiamo $x = \frac{L \cdot A.^{co} R.^{o} c\ Seno\ y}{2b}$, ne risulta $t = \frac{kx}{L}\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$, e ponendo $x = L$, si scopre, che in un'intera vibrazione si spende il tempo $t = k\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$, qualmente ho trovato servendomi della formola $\frac{2ELPdt^2}{Mk^2dx^2} \cdot ddy = ddy'$.

Dalla sovrapposta equazione $x = \frac{L}{2b} \cdot A.^{co} R.^{o} c\ Seno\ y$ si deduce quest'altra $\frac{x}{L} = \frac{A.^{co} R.^{o} c\ Seno\ y}{2b} = \frac{z}{2b}$, mettendo $A.^{co} R.^{o} c\ Seno\ y = z$. Per la qual cosa fatta la sostituzione nella formola $t = \frac{kx}{L}\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$, troveremo $t = \frac{kz}{2b}\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$, ch'è la nota equazione, da cui prende regola il tempo impiegato da una corda, che si vibra intera, dal principio sino al fine di una sua vibrazione. Se t esprime la quarta parte del tempo di una vibrazione, sarà $z = \frac{b}{2}$, e $4t = k\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$. Dinoti t la metà del tempo di una vibrazione, ed eguagliandosi z a b, sarà $2t = k\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$. Finalmente quando t è a pareggiare il tempo di una vibrazione, avremo $z = 2b$, e $t = k\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$.

Vibrandosi la corda divisa nel numero n di parti eguali, troveremo con simil metodo la sovrascritta formola $t = \frac{kx}{L}\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$. Posto $x = \frac{L}{n}$, scoprasi $t = \frac{k}{n}\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$, e tal è il valore del tempo di una vibrazione della corda divisa nel numero n di parti aliquote $\frac{L}{n}$. Che se sarà $x = L$, ne risulterà $t = k\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$ tempo di una vibrazione della corda intera, il quale s'eguaglia al tempo del numero n di vibrazioni della corda divisa nelle predette parti aliquote.

In cambio di $\frac{x}{L}$ sostituisco il suo valore $\frac{z}{n \cdot 2b}$, e ne nasce $t = \frac{kz}{n \cdot 2b}\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$. Se determino $z = 2b$, trovo $t = \frac{k}{n}\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$, tempo di una vibrazione della corda divisa nelle parti aliquote $\frac{L}{n}$: e se faccio $z = n \cdot 2b$, mi si presenta $t = k\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$, tempo del numero n di vibrazioni della corda come sopra divisa, il qual s'eguaglia al tempo di una vibrazione della corda intera.

Dovendo nella equazione $\frac{2ELPdt^2}{Mk^2dx^2} \cdot ddy = ddy'$ riferirsi $ddy : ddy'$ in data ragione, è stata da me prescelta quella di egualità, la quale mi ha condotto alla conseguenza, che nella formola $t = k\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$ significhi t il tempo di una vibrazione della corda intera. Se al solito dinotando n un numero della

serie

serie 1, 2, 3, 4 &c: avessi posto $ddy = n^2 ddy'$, si sarebbe da me trovato $nt = \frac{kx}{L}\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$, e quando $x = L$, $nt = k\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$; nella qual ultima equazione t si eguaglia al tempo d'una vibrazione della corda, che oscilla divisa nel numero n di parti aliquote $\frac{L}{n}$. Stabilita l'equazione $n^2 ddy = ddy'$, si scoprirebbe, quando $x = L$, $\frac{t}{n} = k\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$, e t sarebbe uguale al tempo d'una vibrazione della corda n, la cui lunghezza nL multipla di L. Dal porre adunque $ddy = n^2 ddy'$, ovvero $n^2 ddy = ddy'$ in cambio di $ddy = ddy'$, non ne nascono conseguenze sostanzialmente diverse; passandosi agevolmente per esempio dall'equazione $nt = k\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$ alla $T = k\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$ collo stabilire $nt = T$. Quindi non solo lecitamente, ma di più con molta convenienza è stata da me supposta $ddy = ddy'$, dipendendo da tale ipotesi la conseguenza, che ad $x = L$ corrisponda t uguale al tempo d'una vibrazione della corda intera, che si vuole principalmente determinare.

Alcune chiare sperienze da me riferite nello Schediasma IV. ci fanno toccare con mano, che col suono principale, e più grave 1. della corda intera sono congiunti i suoni 2, 3, 4, 5, 6 &c. delle due metà, della terza, della quarta, quinta, sesta parti &c. della corda stessa, i quali restano talmente coperti dal più forte espresso dall'unità, che non usando qualche artifizio da me nel citato Schediasma insegnato, difficilmente si distinguono, salvochè ponendovi una grande attenzione. Da ciò s'inferisca, che la corda dee accomodarsi ad una curva composta delle semplici d'uno, due, tre, quattro, cinque, sei ventri &c., le quali rendono i suoni mentovati: ma rispettivamente a tutta essa curva si avvera la formola $t = \frac{kx}{L}\sqrt{\frac{LM}{2EP}}$; dunque vale altresì in riguardo alla curva composta.

Nell'Appendice allo Schediasma IV. ho dato il metodo, col quale si possono costruire le bilanciate curve composte, e l'ho illustrato con alcuni semplici esempj. Ho fatto vedere, che l'ordinata della curva composta s'eguaglia alla somma delle ordinate delle curve componenti relative alla medesima assissa, postochè tutte siano positive. Che se alcune fossero negative,

farebbe

sarebbe d'uopo il sottrarle dall'aggregato delle positive. Sieno $\pm Hc$, $\pm H'c$, $\pm H''c$, $\pm H'''c$ &c. le massime ordinate delle curve semplici di ventri 1, 2, 3, 4 &c.; e q, q', q'', q''' &c. le ordinate corrispondenti alla comune ascissa x. Per la cosa detta si avveranno l'equazioni $\pm \frac{2Hbx}{L} = A^{co}R^{o}Hc$ Seno q, $\pm \frac{4H'bx}{L} = A^{co}R^{o}H'c$ Seno q', $\pm \frac{6H''bx}{L} = A^{co}R^{o}H''c$ Seno q'', $\pm \frac{8H'''bx}{L} = A^{co}R^{o}H'''c$ Seno q''' &c.; onde si abbia per conseguenza nei circoli, i cui raggi Hc, $H'c$, $H''c$, $H'''c$ &c., $q = \pm$ Seno $\frac{2Hbx}{L}$, $q' = \pm$ Seno $\frac{4H'bx}{L}$, $q'' = \pm$ Seno $\frac{6H''bx}{L}$, $q''' = \pm$ Seno $\frac{8H'''bx}{L}$ ± &c. Ma nei circoli dei raggi Hc, c i seni degli archi simili stanno come i raggi; dunque Seno $\frac{2Hbx}{L}$: Seno $\frac{2bx}{L}$ :: Hc : c, e quindi Seno $\frac{2Hbx}{L} = H$ Seno $\frac{2bx}{L}$, e per la stessa ragione Seno $\frac{4H'bx}{L} = H'$ Seno $\frac{4bx}{L}$, Seno $\frac{6H''bx}{L} = H''$ Seno $\frac{6bx}{L}$, Seno $\frac{8H'''bx}{L} = H'''$ Seno $\frac{8bx}{L}$ &c., i quali seni appartengono tutti al medesimo circolo, il cui raggio $= c$. E poichè l'ordinata y nella curva composta s'eguaglia alla somma $q + q' + q'' + q'''$ &c. delle ordinate delle curve componenti, le quali possono essere positive, e negative, ne nasce l'equazione $y = q + q' + q'' + q'''$ &c., e sostituendo in vece di q, q', q'', q''' &c. i competenti valori,
$y = \pm H$ Seno $\frac{2bx}{L} \pm H'$ Seno $\frac{4bx}{L} \pm H''$ Seno $\frac{6bx}{L} \pm H'''$ Seno $\frac{8bx}{L}$ &c.
equazione generalissima della curva bilanciata, a cui può accomodarsi una corda sonora, mentre si vibra. I coefficienti H, H', H'', H''' &c. sono capaci di qualunque valore, che si concilj colla grandezza minima delle quantità Hc, $H'c$, $H''c$, $H'''c$ &c. uguali alle massime ordinate delle curve semplici, e ciascuno di essi può anche essere $= 0$.

Non voglio lasciar di avvertire, che posto il coefficiente $H = 0$, si udirà nondimeno il suono della corda intera, quando i suoni confacenti alle curve semplici, onde formasi la composta, sieno espressi da numeri nel totale aggregato fra loro primi. Egli è facile da dimostrarsi, che nella detta ipotesi la corda passa da uno stato all'altro di quiete nel tempo di una vibrazione della corda intera: ma il passare da uno stato all'altro di quiete, è lo stesso che il fare una vibrazione; dunque anche supposto $H = 0$, la corda intera si vibra, e ci fa sentire il suono,

che

che le conviene: Nell' Appendice allo Schediasma IV. num.° V. ho supposto, che la corda si vibri bipartita, e tripartita congiuntamente; ed ho fatto vedere al num.° VI., che insieme coi suoni delle due metà, e delle terze parti si udirebbe altresì quello della corda totale.

Incitata in qualsivoglia modo una corda all'estremità, si adatterà in un tempo brevissimo, che in altra occasione determinerò, a quella delle nostre curve, che le particolari circostanze richiederanno; e l'esperienza dimostra, che la curva è originata dalla composizione di moltissime curve semplici. Presa dalla corda una tal curva, ha subito luogo la formola $\frac{2ELPdt^2}{Mk^2dx^2}\cdot ddy = ddy'$, la quale appartiene soltanto alle curve bilanciate, essendo nata dalla supposizione, che la forza $-\frac{2ELPddy}{Mdx^2}$ acceleri unicamente, o ritardi la particola DE (Figura) senza aver parte alcuna nel moto delle altre particole, e chiamandosi da me bilanciata quella curva, nella quale non si dà comunicazione da una particola all'altra. Per ottener ciò egli è di uopo, che nelle curve componenti le forze acceleratrici accettino la ragione delle ordinate, qualmente in fatti succede; della qual verità leggasi del Sig. Conte la dimostrazione al num. XII. dello Schediasma IV. Non seguendo adunque comunicazione di moto fra le particole delle curve componenti, non accaderà nemmeno nella composta, a cui perciò la proprietà compete d'essere bilanciata.

Il perchè la scoperta equazione contiene tutte le curve possibili equilibrate, a cui può accomodarsi una corda sonora, mentre si vibra; e quindi da essa vien esaurita la formola $\frac{2ELP}{Mk^2dx^2}\cdot ddy = ddy'$.

Può darsi, che mi lusinghi, ma io credo fermamente, che nella soluzione d'un problema fisico-matematico quel metodo debbasi preferire, che ci guida alla spiegazione di un maggior numero di fenomeni. Col mio metodo io spiego la pluralità dei suoni nella medesima corda, il passaggio dei suoni da una corda all'altra, l'esperienza del Sig. Giuseppe Tartini, ed il suono falso, che viene reso da una corda imperfetta, fra gli

elementi

elementi dalla quale non cessa mai la comunicazione del moto; perchè non può mai costantemente accomodarsi ad una curva bilanciata, ed isocrona. Quindi addiviene, che nè la stessa particola, nè particole diverse facciano le loro vibrazioni egualmente durevoli, ma bensì passino dentro certi limiti dal grave all'acuto, e dall'acuto al grave, nel che consiste la natura del suono falso. Per vedere quanto ci vi escano gli altri metodi nella spiegazione dei fenomeni, mi serva di esempio l'illustre Sig. de la Grange, il quale dopo essersi raggirato per i calcoli più reconditi, pone in dubbio, se col suono più grave di una corda siano congiunti dei suoni acuti.

Io sottopongo per altro gli esposti miei pensamenti al purgato giudicio dello stimatissimo Sig. Conte, che sente tanto avanti nell'analisi più sublime, negli studj fisico-matematici, e nell'Acustica singolarmente.

t-

'o-

r.

ch-

tem.

ines

roy.

Lettera II.
al Sig.r Co. Girolamo
Zanaroli.
contenuta nel Nuovo Giornale T. XIV.
pag. 269

Risposta

alle Riflessioni Analitiche del Signor Ab. Gioachino Pessuti già Professore di Matematiche nel Corpo de' Cadetti Nobili di Pietroburgo sopra una lettera scrittagli dal Sig.r Ab. Conte Vincenzo Riccati, ed inserita ultimamente nella nuova Raccolta di Opuscoli scientifici, e filologici stampata in Venezia nell'anno 1776.

Si avverte, che lo Scrittore di questa Risposta è il Signor Co. Giordano Riccati fratello del Signor Ab. Co. Vincenzo, il quale in essa si finge discepolo dello stesso.

Risposta
alle Riflessioni Analitiche
del Sig. Abate Gioacchino
Pessuti già Professore di
Matematiche nel Corpo de'
Cadetti Nobili di Pietroburgo
sopra una Lettera scrittagli
dal Sig. Abate
Conte Vincenzo Riccati
ed inserita ultimamente
nella Nuova Raccolta
di Opuscoli Scientifici e Filologici
stampata in Venezia nell'anno
1776.

Benchè il nome celebre del Sig. Ab. Co. Vincenzo Riccati da qualche censura non possa ricevere detrimento, nulladimeno essendo a lui debitore dei miei progressi nelle matematiche discipline, la gratitudine mi sollecita di imprendere la sua difesa, dando una modesta, rispettosa risposta alle Riflessioni Analitiche del Ch. Sig. Ab. Gioacchino Pessuti pubblicate l'anno scorso in Livorno. Avendo questi dato un applaudito estratto delle eccellenti Istituzioni Analitiche dell'Ab. Riccati nei tomi primo e secondo del Giornale de' Letterati di Italia stampato in Modena nell'anno 1773., ed in mezzo a molti elogj avendo frammischiata qualche censura, giudicò il Co. Riccati di indirizzargli li 29. Agosto 1773. una lunga Lettera, in cui rendeva

rendeva buon conto delle ragioni, che li aveano indotto ad operare come avea creduto espediente, e nello stesso tempo li avvertiva amichevolmente di alcune osservazioni, che avea notate leggendo l'Estratto. Sopravvisse questo insigne Geometra mesi sedici e mezzo, cioè a dire sino ai 17. Gennajo dell'anno 1775., in cui passò a miglior vita, nè mai ebbe il contento di ricevere risposta dal Sig. Ab. Dassuti. Avendo fatta riflessione i Sig.^ri^ Co. suoi Fratelli ch'aveano pubblicata la censura, giudicarono opportuno il pubblicare ancor la difesa, inserendo la mentovata Lettera nel tomo 30. della nuova raccolta di Opuscoli scientifici e filologici stampata in Venezia nell'anno 1776., la cui pubblicazione perciò non dovea recar maraviglia alcuna al Sig. Ab. Dassuti. Io seguirò l'ordine della Lettera dell'Ab. Riccati e della Risposta dell'Ab. Dassuti.

§. 1.

Tom. 1. pag. 34.

Avea detto nell'Estratto il Sig. Ab. Dassuti, i problemi semideterminati esser quelli, che contenendo pari numero di condizioni e d'incognite, non somministrano equazioni per esprimere tutte quelle. Così fatta diffinizione sembrò oscurissima al Co. Riccati, ed atta di leggieri a condurre al falso. Si dovrebbe dire secondo il suo parere, che i problemi semideterminati

son

son del genere degli indeterminati; perchè il numero delle equazioni, che somministrano, è minore del numero delle incognite: ma a cagione di alcune condizioni aggiunte, che non si lasciano esprimer con equazioni, vien ristretto il numero delle infinite soluzioni, onde son capaci. Tali sono le condizioni, che i numeri sien positivi, ed interi, che siano quadrati, cubi &c. Il Sig. Ab. Lassuti si sbriga dicendo, che o sono oscure amendue le diffinizioni, o se quella del Co. Riccati non è tale, neppure lo è certamente la sua. Io frattanto sarei di diversa opinione; imperciocchè se per esempio si proponga di trovare due quadrati, la cui somma s'uguagli ad un terzo quadrato, il problema è indeterminato. Si aggiunga la condizione non esprimibile con equazione, che i lati di questi quadrati vengano dinotati da numeri interi, e ristrignendo essa il numero delle soluzioni, ma non si fattamente che divenga finito, il problema passa alla classe dei semideterminati. Io non credo, che più chiara idea di questa si possa dare dei problemi semideterminati.

§. 2.

Pag. 45. Al Co. Vincenzo Riccati, che avea letto e studiato e le Opere di Gio. Bernoulli, e la Memoria dell'Eulero, in cui prova che ad ogni numero corrisponde un' infinità di logaritmi, era notissimo il

Teorema

Teorema Bernoulliano, che stabilisce essere il diametro alla circonferenza del circolo come $\sqrt{-1} : l.\,{-1}$. Tra i manoscritti dell' Ab. Riccati si trovano cinque Lettere, scritte l'anno 1763, nelle quali discute a fondo l'argomento de' logaritmi de' numeri negativi. Nella Lettera quarta esamina i ragionamenti de' Sig.ri Cav. de Foncenex, ed Eulero, la cui Memoria per conseguenza avea non solo veduta, ma ancora molto studiata. Riflette il Sig. Ab. Bassuto, che il Co. Vincenzo non diceva nella sua Lettera siccome dire aver avvertito il Bernoulli, ma bensì siccome dire aver prima di ogni altro avvertito il Bernoulli, non sovvenendogli allora, se veramente il Bernoulli fosse il primo, a cui si dovesse questa scoperta.

Assunta la formola $\frac{a^2 dz}{z^2+a^2}$ esprimente l'elemento dell' arco circolare col mezzo della tangente $= z$, per ridurla ai logaritmi, fa uso della sostituzione $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = \frac{t}{a}$, e dopo le necessarie operazioni, perviene alla formola logaritmica $\frac{a\sqrt{-1}}{2} \cdot \frac{dt}{t}$ indicante l'elemento di un arco circolare. Presa la sottotangente $= a$, passa all' integrazione coll' aggiunta della costante, e determinando altresì il protonumero $= a$, trova l'arco circolare $= \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot l.\,t = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l.\,a\left(\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right)$ $= \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l.\,a\left(\frac{z^2-a^2+2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2}\right)$ moltiplicando,

a

e dividendo per $z+a\sqrt{-1}$.

Due proposizioni egli dice: la prima, che nella espressione dell'arco circolare $\frac{\sqrt{-1}}{a}l.-1$ il logaritmo di -1 ha da essere immaginario, e questa è vera senz'alcun dubbio: la seconda, ch'esser dee immaginario anche il numero -1. Ad una tale asserzione l'ha indotto non la credenza, che ad un numero reale non possano competere logaritmi immaginarj, ma bensì l'equazione $-1 = -a\left(\frac{z^2-a^2+2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2}\right)$, nella quale apparisce dover esser sempre immaginario il valore di -1. Spettava al Sig. Ab. Cassuti lo scioglierere questo nodo, e nulla egli ne dice. La cosa è assai sottile, e ben ci fa conoscere, che non c'è mai cautela, che d'abbasi trascurare. Il denominatore della predetta formola nasce dal moltiplicare $z-a\sqrt{-1}$ in $z+a\sqrt{-1}$, onde ne risulta il prodotto $z^2+a^2+az\sqrt{-1}-az\sqrt{-1} = z^2+a^2 - 0\sqrt{-1}$. Avremo dunque nel caso di $z=0$ la nostra formola $-1 = -a\left(\frac{-a^2+0\sqrt{-1}}{a^2-0\sqrt{-1}}\right) = +a$; qualmente a prima vista deducesi nella stessa ipotesi dalla formola $-1 = -a\left(\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right)$. Se il termine $0\sqrt{-1}$ non può trascurarsi nel numeratore, a cagione che conserva nello stesso la qualità d'immaginario, ~~come~~ qualmente pensava il Co. Ab. Riccati, non sarà nemmeno lecito di trascurarlo nel denominatore; e se si vuol trasandare in

questo

queste, dee trascurarsi anche in quello.

Ha inoltre l'Ab. Riccati ~~pensato~~ vindicato, che il numero $-t = -a\left(\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right)$ dovesse essere immaginario quando $z = \infty$. Anche sopra ciò il Sig. Ab. Dassuti osserva silenzio. Ecco come provo reale il numero in tal circostanza. Pongo $z = \frac{a^2}{0}$, e fatta la sostituzione, trovo il predetto numero $-t = -a\left(\frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}}\right)$: ma il nulla è del pari positivo, e negativo; dunque lo posso scrivere anche così $-t = -a\left(\frac{a+0\sqrt{-1}}{a+0\sqrt{-1}}\right) = -a$, ed imparare, che il numero è reale anche quando $z = \infty$. Dato che in essa ipotesi sia $t = a$, il Sig. Co. Vincenzo agevolmente perviene alla proporzione fra il diametro e la periferia circolare stabilita da Gio. Bernoulli, la quale viene elegantemente dimostrata dal Sig. Ab. Dassuti.

E qui prende egli occasione di succiolare la gran quistione intorno alla dottrina dei logaritmi dei numeri negativi, ed immaginarj, la quale ha dato motivo a tanti paradossi analitici, dichiarandosi di entrare tanto più volentieri in questa apparente digressione, quanto che essa ci darà campo di rilevare alcuni altri abbagli contenuti in questo medesimo §. della lettera dell'Ab. Riccati. Vedremo da qual parte stiano gli abbagli, e siccome ne ho confessato uno dal Co. Riccati, così

e non potendosi secondo lui trascurare la quantità relativamente nulla all'altra perchè immaginaria.

così confido di trovare una pari docilità nel Sig.r Ab. Bassuti. Si propone dunque da sciogliere, il seguente

Problema

<u>Determinare tutti i logaritmi di qualunque numero dato reale o immaginario, positivo o negativo.</u>

" 1. Si abbia un qualunque numero posi-
" tivo a, e se ne cerchino i suoi logaritmi.
" Essendo a il raggio di un circolo, e z la
" tangente di un arco qualunque u del
" medesimo, si ha, com'è noto, l'equa-
" zione $du = \frac{a^2 dz}{a^2+z^2}$, che si converte facil-
" mente in quest'altra $du = \frac{\frac{1}{2}adz}{a+z\sqrt{-1}} + \frac{\frac{1}{2}adz}{a-z\sqrt{-1}}$.
" Integrando adunque sarà l'arco u =
" $\frac{a}{2\sqrt{-1}} \cdot \left(l.\overline{a+z\sqrt{-1}} - l.\overline{a-z\sqrt{-1}} \right) = \frac{a}{2\sqrt{-1}} l. \left(\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}} \right)$
" prendendo 1. per sottotangente. Supponen-
" do in essa il raggio a = 1, e la tangente
" z = 0; si avrà $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l1$. Ma chiamando
" p la mezza circonferenza, la tangente
" z = 0 corrisponde agli archi 0, ± p,
" ± 2p, ± 3p, ± 4p, &c. ed in genere all'
" arco mp, intendendo per m qualunque
" numero intiero positivo o negativo;
" dunque si avrà $mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l1$, e però
" $l1 = 2mp\sqrt{-1}$; cioè sarà $l1 = 0, \pm 2p\sqrt{-1}$,
" $\pm 4p\sqrt{-1}, \pm 6p\sqrt{-1}, \pm 8p\sqrt{-1}$, &c. appunto
" come si dimostra da <u>Eulero</u> nel Probl. 1.
" della sua Memoria.

" Dunque essendo A = la, sarà la =
" $la.1 = la + l1 = A, A \pm 2p\sqrt{-1}, A \pm 4p\sqrt{-1}$,
" $A \pm 6p\sqrt{-1}$, &c. "

Io noto che sendosi $l1 = 2mp\sqrt{-1}$, fatto $m=0$, avremo $l1 = 0\sqrt{-1}$. In questo caso i Sig.ri Eulero, e Passuti suppongono $l1 = 0$, cioè a dire $l1$ uguale ad un nulla reale, mentre effettivamente si agguaglia ad un nulla immaginario, ^ In tal circostanza abbiamo $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l1 = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot 0\sqrt{-1} = 0$; e quindi l'arco u si agguaglia ad un nulla reale, essendo $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = 1$. Dalla equazione pertanto $l1 = 2mp\sqrt{-1}$ non si raccoglie verun logaritmo reale dell'unità, dandoli tutti immaginarj; benchè per altro il logaritmo della unità, che si è assunto come primo numero, compete altresì il valore di un nulla reale. Ma ritorniamo al Sig. Ab. Passuti.

^ che si può anche chiamar nulla di quantità immaginaria.

« II. Si cerchino ora i logaritmi di un qualunque numero negativo $-a$. Poi-« chè non solo il semiquadrante ha la « sua tangente $z=1$, ma ancora un' in-« finità di archi compresi nella formola « generale $45^\circ + mp$, intendendo per m e p le medesime quantità di prima, « in luogo di essere solamente il semi-« quadrante $= \frac{1}{2\sqrt{-1}} l\sqrt{-1}$, come si è sup-« posto nella dimostrazione del teorema, « sarà più generalmente $45^\circ + mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l\sqrt{-1}$, e però $l\sqrt{-1} = (90^\circ + 2mp)\sqrt{-1}$, « e raddoppiando $2l\sqrt{-1}$, cioè $l-1 =$ « $(180^\circ + 4mp) \cdot \sqrt{-1}$.

« Che se in luogo di fare $z=1$ nella formola

" formola generale $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)$ si farà
" $z = -1$, sarà l'arco $u = -45^\circ + mp$, ed
" $\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} = \frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$, poichè moltiplican-
do si ha $1-\sqrt{-1} = (1+\sqrt{-1}) \cdot -\sqrt{-1}$, e però
" $l-\sqrt{-1} = (-90^\circ + 2mp) \cdot \sqrt{-1}$, e raddoppiando
" $2l-\sqrt{-1} = (4mp - 180^\circ) \cdot \sqrt{-1}$. Ora $-\sqrt{-1}$, e
$+\sqrt{-1}$ essendo egualmente le radici qua-
" drate di -1, sarà $2l-\sqrt{-1} = l-1 = (4mp - 180^\circ) \cdot \sqrt{-1}$.

Essendosi adunque provato ancora
" poc'anzi $l-1 = (4mp + 180^\circ) \cdot \sqrt{-1}$, sarà gene-
" ralmente $l-1 = (4mp \pm 180^\circ) \cdot \sqrt{-1} = (4m \pm 1) p\sqrt{-1}$.
Sostituendo dunque successivamente in
" luogo di m tutti i numeri interi positivi
" e negativi, sarà $l-1 = \pm p\sqrt{-1}$, $\pm 3p\sqrt{-1}$,
" $\pm 5p\sqrt{-1}$ $\pm 7p\sqrt{-1}$ &c. come per altra via
aveva ritrovato Eulero nel Probl. 2. della
sua Memoria.

" Quindi, come sopra, essendo $A = la$,
" si avrà $l-a = la.-1 = la + l-1 = A \pm p\sqrt{-1}$,
" $A \pm 3p\sqrt{-1}$, $A \pm 5p\sqrt{-1}$ &c. donde apparisce
" che i logaritmi delle quantità negative
" sono tutti immaginarj.

Sin qui il Sig.r Ab. Cassuti, ai cui
dotti bensì, ma troppo limitati divisa-
menti si aggiunga, che la formola
$du = \frac{a^2 dz}{a^2 + z^2}$ si può disporre parimente
così $du\sqrt{-1} = \frac{\frac{1}{2} a\, dz}{z - a\sqrt{-1}} - \frac{\frac{1}{2} a\, dz}{z + a\sqrt{-1}}$ ponde
integrandola si abbia
$u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l\,\overline{z - a\sqrt{-1}} - l\,\overline{z + a\sqrt{-1}}\right) = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}\right)$.
Moltiplicando per $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ scopriremo $u =$
$\frac{a}{2\sqrt{-1}} \cdot l\left(\frac{a + z\sqrt{-1}}{-a + z\sqrt{-1}}\right) = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{-a - z\sqrt{-1}}{a - z\sqrt{-1}}\right)$, e

supponendo

supponendo il raggio $a = 1$, e la tangente $z = 0$, ne nascerà $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l{-1}$, e poichè la tangente $z = 0$ corrisponde agli archi $0, \pm p, \pm 2p, \pm 3p$ &c. e generalmente all'arco mp, si avrà $mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l{-1}$, e perciò $l{-1} = 2mp\sqrt{-1}$, cioè $l{-1} = 0\sqrt{-1}, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 4p\sqrt{-1}, \pm 6p\sqrt{-1}$ &c.; che sono quegli stessi valori, che il Eulero, e il Ab. Bassuti hanno trovato competere a $l1$.

Posto $A = la$, si avrà $\log -a = la.-1 = la + l{-1} = A \pm 0\sqrt{-1}; A \pm 2p\sqrt{-1}, A \pm 4p\sqrt{-1}, A \pm 6p\sqrt{-1}$ &c. Lo stesso si troverebbe, se si mettesse $A = l{-a}$, richiedendo contro l'opinione dei lodati Autori $\pm a$ il medesimo logaritmo.

Se nella formola $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}} l\left(\frac{-a-z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right)$ si porrà $a = 1 = z$; si determinerà $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l\left(\frac{-1-\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l{-\sqrt{-1}}$, significando u un infinito numero di archi espressi dalla formola $45^\circ + mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l{-\sqrt{-1}}$. Fatta la moltiplicazione per 2. avremo $(90^\circ + 2mp)\sqrt{-1} = l{-\sqrt{-1}}$: ma pel num.ro 11. del Problema $(90^\circ + 2mp)\sqrt{-1} = l\sqrt{-1}$; dunque $(180^\circ + 4mp)\sqrt{-1} = l{-\sqrt{-1}} + l\sqrt{-1} = l1$; e giacchè pel citato numero $(180^\circ + 4mp)\sqrt{-1} = l{-1}$, sarà $l\pm 1 = (\pm 180^\circ + 4mp)\sqrt{-1}$.

Facendo nella mia formola $z = -a = -1$, si scoprirà collo stesso metodo

li

$l1 = (+180^\circ + 4mp)\sqrt{-1}$; ed essendo pel num.ro II. $l-1 = (-180^\circ + 4mp)\sqrt{-1}$, avremo per conseguenza $l\pm 1 = (\pm 180^\circ + 4mp)\sqrt{-1}$ $= (4m \pm 1)p\sqrt{-1}$, equazione, che unisce le due ipotesi di $z = \pm 1$. Sostituiti pertanto ordinatamente in luogo di m tutti i numeri interi positivi, e negativi, si troverà $l\pm 1 = \pm p\sqrt{-1}, \pm 3p\sqrt{-1}, \pm 5p\sqrt{-1}, \pm 7p\sqrt{-1}$ &c., e si inferirà competere a ± 1 i medesimi logaritmi.

Posto $A = l\pm a$, si avrà $l\pm a = la \pm 1$ $= la + l\pm 1 = A \pm p\sqrt{-1}, A \pm 3p\sqrt{-1}$, $A \pm 5p\sqrt{-1}, A \pm 7p\sqrt{-1}$ &c.

Se raccolgansi in una somma tutti i valori finora trovati di $l\pm 1$, di $l\pm a$, ci si presenterà

$l\pm 1 = 0\sqrt{-1}, \pm p\sqrt{-1}, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 3p\sqrt{-1}$, $\pm 4p\sqrt{-1}, \pm 5p\sqrt{-1}, \pm 6p\sqrt{-1}, \pm 7p\sqrt{-1}$ &c. $= mp\sqrt{-1}$;

$l\pm a = A \pm 0\sqrt{-1}, A \pm p\sqrt{-1}, A \pm 2p\sqrt{-1}$, $A \pm 3p\sqrt{-1}, A \pm 4p\sqrt{-1}, A \pm 5p\sqrt{-1}, A \pm 6p\sqrt{-1}$, $A \pm 7p\sqrt{-1}$ &c. $= A \pm mp\sqrt{-1}$. E conciossiachè ± 1, $\pm a$ si appropriano gli stessi logaritmi, si raccoglie da ciò confermarsi la verità della Bernoulliana sentenza da qual metodo, col quale i Sig.ri Eulero, e Cassuti pensavano di averla convinta di falsità.

Applichiamo intanto la nostra riflessione al proseguimento della soluzione del Sig.r Ab. Cassuti.

« III. Finalmente facendo nella formola $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l\left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)$ la quantità $\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}$ eguale ad

« ad una qualunque data quantità im-
« maginaria, si determinerà la tangente
« 2 dell'arco u; e quindi l'arco medesi-
« mo, conosciuto il quale per mezzo dell'
« accennata formola si avrà facilmente il
« logaritmo di $\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}$, cioè della proposta
« quantità immaginaria.

« Ed in fatti egli è noto che la più
« complicata quantità immaginaria può
« sempre ridursi a questa forma $A+B\sqrt{-1}$,
« in cui A e B sono quantità reali. Ora
« prendendo $\sqrt{A^2+B^2}$ per raggio, e
« facendolo $= C$, saranno $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$
« il coseno ed il seno di un certo arco q
da prendersi in un circolo descritto col
« raggio $= 1$, e da determinarsi facilmen-
« te colla Tavola de' seni. Sarà dunque
« $A = C \cos. q$, $B = C \text{sen.} q$, e quindi
« $l(A+B\sqrt{-1}) = lC(\cos. q + \text{sen.} q \sqrt{-1}) =$
« $lC + l(\cos. q + \text{sen.} q\sqrt{-1})$. Basterà dunque
« trovare tutti i logaritmi di $\cos. q + \text{sen.} q\sqrt{-1}$
« per avere anche quelli di $A+B\sqrt{-1}$.

« Si faccia pertanto, come si è detto
« poc'anzi $\cos. q + \text{sen.} q\sqrt{-1} = \frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}$,
« donde si avrà $\cos. q + \text{sen.} q\sqrt{-1} - 2\cos. q\sqrt{-1}$
$+ 2\,\text{sen.} q = 1+2\sqrt{-1}$, ed agguagliando la
« parte reale del primo membro colla parte
« reale del secondo, e la parte immagina-
« ria colla parte immaginaria, si avranno
« le due equazioni $\cos. q + 2\,\text{sen.} q = 1$,
« $\text{sen.} q - 2\cos. q = 2$, la prima delle quali
darà $2 = \frac{1-\cos. q}{\text{sen.} q} = \text{tang.} \frac{1}{2} q = \text{tang.} (\frac{1}{2} q + \text{imp})$

intendendo

« intendendo per m e p i medesimi nume-
« ri di sopra, e la seconda $z = \frac{\text{sen}.q}{1+\cos.q} =$
« $\text{tang}.\frac{1}{2}q = \text{tang}.(\frac{1}{2}q + mp)$ come si avea
« dalla prima.

« Si dovrà dunque nell' equazione $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)$ sostituire $\frac{1}{2}q + mp$ in luogo dell' arco u, e $\cos.q + \text{sen}.q\sqrt{-1}$ in luogo di $\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}$, e con ciò si avrà $\frac{1}{2}q + mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l(\cos.q + \text{sen}.q\sqrt{-1})$, e però $l(\cos.q + \text{sen}.q\sqrt{-1}) = (q + 2mp)\sqrt{-1}$. Sarà dunque finalmente $l(A + B\sqrt{-1}) = lC + l(\cos.q + \text{sen}.q\sqrt{-1}) = lC + (q + 2mp)\sqrt{-1}$, cioè sostituendo successivamente in luogo di m tutti i numeri interi positivi e negativi sarà $l(A + B\sqrt{-1}) = lC + q\sqrt{-1}$, $lC + (q \pm 2p)\sqrt{-1}$, $lC + (q \pm 4p)\sqrt{-1}$ ec. appunto come trova l'Eulero nel Probl. 3. della lodata Memoria. »

Applico alla formola da me scoperta $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{-1-z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)$ il metodo del Sig. Ab. Rassuti. Avendo egli dimostrato $l(A + B\sqrt{-1}) = lC(\cos.q + \text{sen}.q\sqrt{-1})$, sarà per conseguenza $l(A + B\sqrt{-1}) = l{-C}(-\cos.q - \text{sen}.q\sqrt{-1}) = l{-C} + l(-\cos.q - \text{sen}.q\sqrt{-1})$, e quindi basterà trovare tutti i logaritmi di $-\cos.q - \text{sen}.q\sqrt{-1}$ per avere anche quelli di $A + B\sqrt{-1}$.

Si faccia pertanto $-\cos.q - \text{sen}.q\sqrt{-1} = \frac{-1-z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}$, e si avrà $-\cos.q - \text{sen}.q\sqrt{-1} + z\cos.q\sqrt{-1} - z\,\text{sen}.q = -1 - z\sqrt{-1}$, ed eguagliando la porzione reale del primo membro colla reale del secondo, e la

immaginaria

immaginaria colle immaginarie, ne risulteranno le due equazioni $-\cos.q - z\,\text{sen}.q = -1$, $-\text{sen}.q + z\cos.q = -z$, la prima delle quali darà $z = \frac{1-\cos.q}{\text{sen}.q} = \text{tang}.\frac{1}{2}q = \text{tang}.(\frac{1}{2}q + mp)$; e la seconda $z = \frac{\text{sen}.q}{1+\cos.q} = \text{tang}.\frac{1}{2}q = \text{tang}.(\frac{1}{2}q + mp)$, come si avea dalla prima.

Si dovrà dunque nelle equazione $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{-1-2\sqrt{-1}}{-1-2\sqrt{-1}}$ sostituire $\frac{1}{2}q + mp$ in luogo dell'arco u, e $-\cos.q - \text{sen}.q\sqrt{-1}$ in luogo di $\frac{-1-2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}$, e con ciò si avrà $\frac{1}{2}q + mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l(-\cos.q - \text{sen}.q\sqrt{-1})$, e quindi $l(-\cos.q - \text{sen}.q\sqrt{-1}) = (q + 2mp)\sqrt{-1}$, onde finalmente ne nasce $l(A + B\sqrt{-1}) = l-C + l(-\cos.q - \text{sen}.q\sqrt{-1}) = l-C + (q+2mp)\sqrt{-1}$, cioè sostituendo in luogo di m tutti i numeri interi positivi o negativi, sarà $l(A+B\sqrt{-1}) = l-C + q\sqrt{-1}$, $l-C + (q \pm 2p)\sqrt{-1}$, $l-C + (q \pm 4p)\sqrt{-1}$ &c.

Fatta la riflessione, che il Sig. Ab. Lassuti ha trovato $lC + l(\cos.q + \text{sen}.q\sqrt{-1}) = lC + (q+2mp)\sqrt{-1}$, si inferisca essere generalmente $l(\pm\cos.q \pm \text{sen}.q\sqrt{-1}) = (q + 2mp)\sqrt{-1}$, onde chiara apparisca la verità, che lo stesso logaritmo corrisponda a due numeri uguali, uno positivo, e l'altro negativo.

La soluzione di Eulero è molto differente da quella del Sig. Ab. Lassuti, e secondo il suo parere può sembrare anche soggetta a qualche difficoltà. Assume

il

il Ch. Autore per principio che, esprimendo i un numero infinitamente picciolo, debba essere il logaritmo iperbolico di $1+i$ uguale ad i; donde si avrà $l(1+i)^2=2i$, $l(1+i)^3=3i$, ed in genere $l(1+i)^n=ni$. Ora siccome i è infinitamente picciolo, bisognerà prendere l'esponente n infinito, acciò $(1+i)^n$ possa divenire uguale ad un qualunque numero dato x, diverso da 1. Sia y il logaritmo di x, e si avranno le due equazioni $(1+i)^n=x$, ed $y=lx=l(1+i)^n=ni$. Dalla prima si avrà $i=x^{\frac{1}{n}}-1$, e questo valore di i essendo sostituito nella seconda, darà $y=nx^{\frac{1}{n}}-n$, ovvero $(1+\frac{y}{n})^n-x=0$, equazione che servirà a determinare il logaritmo y, allorchè sarà dato il numero x.

Ed in fatti supponghiamo che si cerchi il logaritmo di 1; sarà dunque $x=1$, e però $(1+\frac{y}{n})^n-1=(1+\frac{y}{n})^n-1^n=0$. Ora essendo dimostrato che la formola z^n-a^n ha per fattore $z^2-2az\cos.\frac{2mp}{n}z+a^2$, intendendo per m e p le medesime quantità di sopra, i fattori di $(1+\frac{y}{n})^n-1^n=0$ saranno similmente $(1+\frac{y}{n})^2-2\cos.\frac{2mp}{n}.(1+\frac{y}{n})+1=0$, donde si ricava $1+\frac{y}{n}=\cos.\frac{2mp}{n}\pm\operatorname{sen}.\frac{2mp}{n}\sqrt{-1}$. Ma essendo n infinito, sarà $\frac{2mp}{n}$ un archetto infinitesimo, e però $\cos.\frac{2mp}{n}=1$, e $\operatorname{sen}.\frac{2mp}{n}=\frac{2mp}{n}$. Si avrà dunque $1+\frac{y}{n}=1\pm\frac{2mp}{n}\sqrt{-1}$, e quindi y, cioè $l1=\pm 2mp\sqrt{-1}$, e $la=la+l1=la\pm 2mp\sqrt{-1}$, come appunto ho ritrovato nel Probl. precedente

il

il Sig. Ab. Pessuti. Con un somigliante artifizio vengono determinati da Eulero i logaritmi dei numeri negativi ed immaginarj, i quali, come già si è detto, confrontano puntualmente con quelli scoperti dal Sig. Ab. Pessuti, che muove contro il metodo dell'Eulero la seguente obbiezione.

« Ma si potrebbe opporre a questa
« soluzione di Eulero, che il principio, ch'
« egli assume, sembra direttamente con-
« trario alla conseguenza che se ne vuol
« dedurre; poichè, se deve esser neces-
« sariamente $l(1+i) = i$, facendosi $i=0$,
« dovrà essere anche necessariamente
« $l1 = 0$, nè potrà mai essere $l1 = \pm 2p\sqrt{-1}$,
« $\pm 4p\sqrt{-1}$ &c. ~~Nè giova dire che dalle equa-~~
« ~~zione medesima $i = x^{\frac{1}{n}} - 1$ apparisca~~
« come si pretende poi di dimostrare. Non
« si vede certamente con bastante chia-
« rezza come dal supporsi semplicemente
« $l(1+i) = i$, si possa poi dedurre $l(1+i)$
« $= i$, $i \pm 2p\sqrt{-1}$, $i \pm 4p\sqrt{-1}$ &c. Nè giova
« dire che dall'equazione medesima $i =$
« $x^{\frac{1}{n}} - 1$ apparisca abbastanza, che infiniti
« debbono essere i valori di i, per la ra-
« gione che siccome due sono i valori di $x^{\frac{1}{2}}$,
« tre quelli di $x^{\frac{1}{3}}$ &c. così infiniti debbono
« essere i valori di $x^{\frac{1}{n}}$, e però di $x^{\frac{1}{n}} - 1$,
« allorchè si supponga n infinito. Imperoc-
« chè questi infiniti valori di i sarebbono
« quei medesimi che si sono trovati, cioè
« $i \pm 2p\sqrt{-1}$, $i \pm 4p\sqrt{-1}$ &c. i quali non sono
« nè infinitamente piccoli, nè reali; condi-

zioni

« zioni nondimeno necessarie, acciò sia
« vera l'equazione $l(1+i) = i$, che si assu=
« me da Eulero come principio fondamen=
« tale della sua soluzione.

« Se queste mie obbiezioni si giudi-
« cassero di qualche peso, bisognerebbe
« dire in quel caso che il grande Eulero aves=
« se fatta la sua bella scoperta per altra via
« differente da quella per cui si è poi com=
« piaciuto di dimostrarla. Sia però comun=
« que, la scoperta è una delle più belle
« e delle più importanti, ed Eulero stesso
« la riguardava come tale. Questo grand'
« Uomo, che ho avuto la sorte di ammirar
« da vicino, e con cui posso vantarmi di es=
« sere unito coi vincoli della più cordiale
« amicizia, e delle più grandi obbligazioni,
« mi disse con un sentimento di vero piace=
« re, che avendo comunicato il suo ritro=
« vato a Gio. Bernoulli poco prima della sua
« morte, questo buon Vecchio gli rispose ch'
« egli moriva contento, perchè vedeva con-
« ciliati quei paradossi apparentemente
« insolubili, che aveano messa ed alimen=
« tata per sì lungo tempo la gran disputa
« dei logaritmi dei numeri negativi tra
« Leibnizz e lui. »

Le obbiezione del Sig.r Ab. Lassuti contro la soluzione del Sig.r Eulero, sembrami che si possa sciogliere così. La formola $l(1+i) = i$, ch'è trascen=dente, ha da contenere infinite radici fra le quali una sola è reale $i = 0$, e l'altre tutte sono immaginarie. La detta formola mi dà in sostanza la stessa che

la equazione differenziale della logistica $\frac{dx}{x} = dy$, in cui posto il numero $x=1$, si ha $dx = dy$. Or assunto $x=1$ come protonumero, abbiamo $l1+dx = dy$, e quando $dx = dy = 0$; $l1 = 0$, unico valore reale, che gli compete; il quale non esclude gli infiniti valori immaginarj $mp\sqrt{-1}$, che esige la natura della formola trascendente $\frac{dx}{x} = dy$.

Se il Sig.r Giovanni Bernoulli avesse avuto agio di esaminare la bella scoperta del Sig.r Eulero; si sarebbe accorto, che ridotta la stessa a tutta l'estensione, di cui è capace, serviva a far toccare con mano essere comune a due reali numeri eguali, uno positivo, e l'altro negativo non solo l'unico logaritmo reale relativo ad un dato protonumero, ma ancora gli infiniti immaginarj. Questa proprietà si estende altresì ai numeri immaginarj positivi e negativi, che sendo eguali richiedono i medesimi logaritmi, uno de' quali può esser reale, e gli altri tutti immaginarj. Ma seguitiamo il Sig.r Ab. Pessuti.

" Sosteneva Gio. Bernoulli che i lo-
" garitmi dei numeri negativi erano i
" medesimi che i logaritmi dei numeri
" positivi, o sia che $l-a = l+a$; perchè,
" diceva egli, essendo $(-a)^2 = (+a)^2$, sarà an-
" cora $l(-a)^2 = l(+a)^2$, cioè $2l-a = 2l+a$,
" e però anche $l-a = l+a$. La risposta che
" si faceva a questa fortissima ragione di
" Bernoulli, in luogo di togliere la difficoltà,

piuttosto

« premostrato accrescevano. Si diceva che sic-
« come $(-a)^2 = (+a)^2$; così ancora $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$,
« e che però si dovrebbe dire che $l(a\sqrt{-1})^4$
« $= la^4$; cioè $4la\sqrt{-1} = 4la$, e $la\sqrt{-1} = la$;
« cioè si dovrebbe dire che i logaritmi delle
« quantità immaginarie sono reali, come si
« pretendono esser quei delle quantità nega-
« tive; conseguenza che nessuno vorrà am-
« mettere, e molto meno vorrà ammetterla
« il Sig. Bernoulli, dopo di avere dimos-
« trato il primo, che il raggio sta alla quar-
« ta parte della circonferenza come $\sqrt{-1}$ a
« $l\sqrt{-1}$; ciò che non potrebbe esser vero,
« se fosse poi $la\sqrt{-1} = la$, e però $l\sqrt{-1} = l1$
« $= 0$ » . . . .

La famosa questione intorno ai lo-
garitmi reali dei numeri reali negati-
vi consiste nello stabilire, se dato il
protonumero f, la logaritmica abbia
il solo ramo dei numeri positivi, o
pure anche quello dei numeri negativi.
La quadratura dell'iperbola la decide
evidentemente, e ci rende manifesto,
che la nostra curva è fornita di due ra-
mi uguali, uno al di sopra e l'altro al
di sotto dell'asse. Abbiasi l'iperbola
fra gli assintoti segnata nella figura,
posto AB protonumero, l'aja CBDE
esprimerà il logaritmo corrispondente
al numero AD. Essendo l'aja CBQ
infinita, si vede che al numero infinito
AQ si riferisca il logaritmo infinito CBQ.
Il perchè l'aje crescenti da B verso Q
determinano i logaritmi cominciando dal
protonumero

protonumero, e terminando nel numero infinito, onde ne risulti la porzione di ramo BH (fig. 2.) dalla parte dei numeri positivi maggiori del protonumero AB, i logaritmi dei quali sono positivi. Sia (fig. 2.) il numero AD minore del protonumero AB, ed essendosi considerata la BD come positiva, le BD devono assumersi come negative; e quindi l'aja negativa CBDG sarà il logaritmo del numero AD minore del protonumero; e poichè al numero = 0, ci corrisponde l'aja negativa infinita CBAP, si scopre che $l.0 = -\infty$, perchè l'aje negative CBDG, che cominciano dal nulla, e vanno a terminare nell'infinito, rappresentano i logaritmi dei numeri, che principiano dal protonumero AB, e vanno a terminare nel nulla. Ne nascerà pertanto la porzione di ramo BK (fig. 2.), che serve ai numeri decrescenti, i cui logaritmi sono negativi.

Divenga negativo il numero Af (fig. 11), ed essendo altresì negativa le ordinata dell'iperbola, dovrà considerarsi come positiva l'aja gfAp. Il perchè il logaritmo di Af si agguaglierà all'aja negativa CBAP detratta la positiva gfAp. Segue AD = Af, e dandosi eguaglianza fra l'aje GDAP, e gfAp, resterà il logaritmo di Af uguale all'aja CBDG: ma alla stessa aja si agguaglia il logaritmo del numero positivo AD uguale al negativo Af; dunque

dua

due numeri eguali, uno positivo, e l'altro negativo richiedono il medesimo logaritmo. Posto il numero negativo $Af = Ab = AB$, l'aja $CBKG$ diventa $= 0$; e perciò anche al numero negativo Ab uguale al precedente AB compete il logaritmo $= 0$ ond'è facile da cavarne la conseguenza, che i predetti numeri, e logaritmi danno l'origine alla porzione di ramo inferiore kb (fig. 2.) uguale al superiore KB, riferendosi sempre allo stesso logaritmo due numeri uguali, uno positivo, e l'altro negativo intorno alla (fig. 2.), e supponendo il numero negativo $Ad > Ab$, gli converrà il logaritmo uguale all'aja positiva $cbde = CADE$, tagliando $AD = Ad$, onde sempre a due numeri uguali uno positivo, e l'altro negativo compete il medesimo logaritmo; Ne nascerà dunque la porzione di ramo inferiore kh (fig. 2.) uguale al superiore KH; e quindi la logistica sarà formata dai due rami KBH, kbh forniti dalla proprietà, che allo stesso logaritmo reale corrispondano costantemente due numeri reali uguali uno positivo, e l'altro negativo.

Essendo geometricamente dimostrato competere il medesimo real logaritmo ai due numeri $\pm a$, ed avendo la logaritmica la proprietà, che ad un numero medio geometrico fra due dati si approprj un logaritmo medio aritmetico fra quelli, che ai predetti

e lo stesso essendosi analiticamente provato in riguardo ai logaritmi immaginarj,

numeri

numeri si confanno, ne segue dover essere $l\pm a\sqrt{-1} = \frac{1}{2}la + \frac{1}{2}l{-a}$. Se $\pm a$ accettino lo stesso logaritmo, sarà $l\pm a\sqrt{-1} = l\pm a$. Ma se a $\pm a$ si adattino diversi logaritmi, non si avvererà la formola $l\pm a\sqrt{-1} = l\pm a$, ch'è particolare, ma bensì la generale $l\pm a\sqrt{-1} = \frac{1}{2}la + \frac{1}{2}l{-a}$. Sia $a = \pm 1$, i di cui logaritmi 0, $\pm p\sqrt{-1}$, $\pm 2p\sqrt{-1}$, $\pm 3p\sqrt{-1}$, $\pm 4p\sqrt{-1}$ &c. Facciasi $l1 = 0$, $l{-1} = p\sqrt{-1}$, onde si abbia $l\pm\sqrt{-1} = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}p\sqrt{-1} = \frac{1}{2}p\sqrt{-1}$. Avremo dunque in tal caso $\sqrt{-1} : l\sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : \frac{1}{2}p\sqrt{-1} :: 1 : \frac{1}{2}p$, ch'è quanto a dire come il raggio al quadrante, qualmente ha stabilito l'illustre Bernoulli. Per altro $\sqrt{-1}$ e $l\sqrt{-1}$ può inferirsi in infinite proporzioni, fra le quali una sola è quella, che si agguagli al rapporto fra il raggio, e il quadrante. Si opporrebbe alla scoperta del Sig.r Bernoulli chi asserisse che a $l\sqrt{-1}$ competa un valor reale, se esso logaritmo altri valori non si appropriasse; ma ricevendone infiniti, e fra questi $\frac{1}{2}p\sqrt{-1}$, la predetta asserzione non porta verun pregiudizio alla Bernoulliana dimostrazione. Non vedo il perchè non si debba ammettere, che ad una quantità immaginaria possa convenire un logaritmo reale. Se come abbiamo osservato infiniti logaritmi appartengono ad un numero reale; non si allegherà ragione, per cui un logaritmo reale non possa spettare ad infiniti numeri immaginarj.

immaginarj. Chiamata e la base della logistica, che ha il logaritmo uguale al protonumero f, ha dimostrato l'Ab. Riccati nella mentovata Lettera, che alla stessa convengono i valori immaginarj $e^{\sqrt{-1}}$, $e^{\sqrt[4]{-1}}$, $e^{\sqrt[8]{-1}}$, ecc. ai quali compete il logaritmo reale f.

« Per provare poi direttamente che non
« può sussistere l'equazione di Gio. Bernoulli
« $l-a = la$; donde si deduce $l-1 = l1 = 0$, ri-
« correre Leibnitz alla nota equazione della
« Logaritmica $e^y = x$, in cui e rappresenta
« qualunque numero dato, ed y il logarit-
« mo del numero x. Ora questa equazione
« non potrà mai dare $e^y = -1$, sia che facciasi
« $y = 0$, ovvero y uguale a qualunque quanti-
« tà reale positiva o negativa. Dunque non
« solamente non si ha $l-1 = l1 = 0$, ma si di-
« mostra altresì con questo, che $l-1$, e però
« anche $l-a = la + l-1$ non può in verun modo
« essere una quantità reale ...

Dopo la chiara, e palpabile dimostrazione dedotta dalla quadratura dell'iperbola, sembra che non si dovesse più questionare intorno ai logaritmi reali de' numeri negativi; e nulladimeno il Leibnitz, e gli altri che li negano sono stati condotti all'errore dalla formola esponenziale $f\left(\frac{e}{f}\right)^y = x$, la quale (esprimendo f il protonumero, e la base della logistica il cui logaritmo $= f$, y i logaritmi, x i numeri) non dà compiutamente salvochè il ramo KBH (fig. 2.). Mettendo $f=1$, ne nasce la formola del Leibnitz $e^y = x$, nella quale e non rappresenta qualunque numero, ma soltanto quello il

cui

cui logaritmo = 1. Il conchiudere, che la logaritmica è priva del ramo inferiore kbh, perchè questo non viene dalla predetta formola somministrato, non è conseguenza legittima, dovendo piuttosto considerarsi la formola come imperfetta. In fatti essendoci nella logistica infinite coppie di coordinate, non c'è ragione di scegliere le due f, e, e di escludere tutte l'altre. Qual maraviglia dunque, che questa scelta arbitraria restringa l'equazione, dimodochè non dia il solo ramo KBH? ..

Mi è caduto quindi in pensiero di sostituire alle coordinate f, e fornite di un costante valore, le due h, g infinitiformi, cioè a dire capaci di infiniti valori relativi, onde ne provenga la formola $f\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{y}{h}} = x$. Affermo pertanto, che a qualunque logaritmo y corrispondono i due numeri $\pm x$. E vaglia il vero io posso sempre determinare un tal valore di h, che si riferisca ad y come il numero pari n all'impari m, onde si abbia $\frac{y}{h} = \frac{m}{n}$ e perciò $f\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{y}{h}} = f\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{m}{n}} = f \cdot \pm \sqrt[n]{\left(\frac{g}{f}\right)^{m}} = x$. Per la qual cosa scelta la opportuna grandezza delle coordinate infinitiformi h, g, io otterrò sempre che sia $f \cdot \pm \left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{y}{h}} = x$, e col mezzo tanto della quadratura dell'iperbola, quanto dell'equazion esponenziale della logistica dimostrerò, che una tal curva è composta dei due rami reali, ed eguali KBH, kbh.

Egli ...

Egli è dunque certo, che posto il protonumero $f=1$, il nulla è un valor reale comune à $l1$, e $l{-1}$, e che per conseguenza è falso, che $l{-1}$, $l{-a}$ non possano essere salvochè *quantità immaginarie*.

« Ma tutte queste contraddizioni
« apparentemente irreconciliabili nasce-
« vano dalla supposizione che si faceva
« da ambedue i partiti; senza però al-
« cun fondamento, che ad ogni numero
« non potesse corrispondere che un solo
« logaritmo. Dalla risoluzione del Probl.
« precedente risulta la falsità di una
« tale supposizione, ed insieme risulta
« la decisione della quistione in favore
« del sentimento di *Leibnizio*, e la rispos-
« ta à tutte le ragioni con cui *Bernoulli*
« pretendeva di impugnarlo. Egli è in-
« dubitabile che tanto $(-a)^2$ quanto $(+a)^2$
« danno egualmente a^2, e che però si de-
« vranno avere i logaritmi delle due
« quantità $(-a)^2$, $(+a)^2$, cioè $2l{-a}$, e $2l{+a}$
« eguali ambidue a la^2. Non ne viene pe-
« rò in conseguenza che debba essere $2l{-a}$
« $= 2l{+a}$, e $l{-a} = l{+a}$. Questa conseguen-
« za che sembra a prima vista naturale
« e necessaria, sarebbe tale di fatti, se
« un solo fosse il valore di la^2; ma sic-
« come sono infiniti i valori di la^2, po-
« trà essere benissimo $2l{-a}$ eguale ad
« alcuni di essi, e $2l{+a}$ eguale ad alcuni
« altri, senza che sia necessario supporre
« $2l{-a} = 2l{+a}$, e $l{-a} = l{+a}$. Ora si è

dimostrato

« dimostrato nel Probl. precedente, che es-
« sendo A il logaritmo reale di a, e però
« $2A$ il logaritmo reale di a^2, si dava ave-
« re $l{+a} = A,\ A \pm 2p\sqrt{-1},\ A \pm 4p\sqrt{-1},\ A \pm 6p\sqrt{-1},$
« $A \pm 8p\sqrt{-1}$ &c.
« $l{-a} = A \pm p\sqrt{-1},\ A \pm 3p\sqrt{-1},\ A \pm 5p\sqrt{-1}$
« $A \pm 7p\sqrt{-1}$ &c.; ovvero
« $2l{+a} = 2A,\ 2A \pm 4p\sqrt{-1},\ 2A \pm 8p\sqrt{-1},\ 2A \pm 12p\sqrt{-1},$
« $2A \pm 16p\sqrt{-1}$ &c.
« $2l{-a} = 2A \pm 2p\sqrt{-1},\ 2A \pm 6p\sqrt{-1},\ 2A \pm 10p\sqrt{-1},$
« $2A \pm 14p\sqrt{-1}$ &c.
« e tutti questi infiniti valori di $2l{+a}$, e
« di $2l{-a}$ sono appunto tutti gli infiniti
« valori di la^2; perchè essendo $2A$ il
« logaritmo reale di a^2, dovrà essere per
« il Probl. preced.
« $la^2 = 2A,\ 2A \pm 2p\sqrt{-1},\ 2A \pm 4p\sqrt{-1},\ 2A \pm 6p\sqrt{-1},$
« $2A \pm 8p\sqrt{-1},\ 2A \pm 10p\sqrt{-1},\ 2A \pm 12p\sqrt{-1},\ 2A \pm 14p\sqrt{-1},$
« $2A \pm 16p\sqrt{-1}$ &c.

« Dunque benchè nessuno dei valori
« di $2l{+a}$ confronti con nessuno dei valori
« di $2l{-a}$, si ha nondimeno tanto $2l{+a}$,
« quanto $2l{-a}$ uguale a la^2.

« Similmente se nella formola che
« abbiamo trovata nel probl. preced.
« $l(\cos. q + \text{sen}. q\sqrt{-1}) = (q + 2mp)\sqrt{-1}$ si
« farà l'angolo $q = 90^\circ = \frac{1}{2}p$, essendo al-
« lora $\cos. q = 0$, $\text{sen}. q = 1$, si avrà $l{+\sqrt{-1}}$
« $= (\frac{1}{2}p + 2mp)\sqrt{-1}$, donde gli infiniti va-
« lori di $l{+\sqrt{-1}}$ saranno $\frac{1}{2}p\sqrt{-1},\ -\frac{3}{2}p\sqrt{-1},$
« $\frac{5}{2}p\sqrt{-1},\ -\frac{7}{2}p\sqrt{-1},\ \frac{9}{2}p\sqrt{-1},\ -\frac{11}{2}p\sqrt{-1},$
« $\frac{13}{2}p\sqrt{-1}$ &c.; e però supponendo che A
« sia il logaritmo reale di a, gli infiniti
« valori di $la\sqrt{-1}$, cioè di $la + l\sqrt{-1}$

saranno

« saranno $A+\frac{1}{2}p\sqrt{-1}$, $A-\frac{3}{2}p\sqrt{-1}$, $A+\frac{5}{2}p\sqrt{-1}$,
« $A-\frac{7}{2}p\sqrt{-1}$, $A+\frac{9}{2}p\sqrt{-1}$, $A-\frac{11}{2}p\sqrt{-1}$, $A+\frac{13}{2}p\sqrt{-1}$ &c.
« e quadruplicando sarà $4la\sqrt{-1} = 4A+2p\sqrt{-1}$,
« $4A-6p\sqrt{-1}$, $4A+10p\sqrt{-1}$, $4A-14p\sqrt{-1}$, $4A+18p\sqrt{-1}$,
« $4A-22p\sqrt{-1}$, $4A+26p\sqrt{-1}$ &c. Essendo poi
« $la = A$, $A+2p\sqrt{-1}$, $A-2p\sqrt{-1}$, $A+4p\sqrt{-1}$, $A-4p\sqrt{-1}$,
« $A+6p\sqrt{-1}$, $A-6p\sqrt{-1}$ &c. si avrà
« $4la = 4A$, $4A+8p\sqrt{-1}$, $4A-8p\sqrt{-1}$, $4A+16p\sqrt{-1}$
« $4A-16p\sqrt{-1}$, $4A+24p\sqrt{-1}$, $4A-24p\sqrt{-1}$ &c.

« Ora poichè A è il logaritmo reale
« di a, sarà $4A$ il logaritmo reale di a^4
« e gli infiniti logaritmi di a^4 saranno in
« virtù del Problema preced.
« $4A$, $4A\pm2p\sqrt{-1}$, $4A\pm4p\sqrt{-1}$, $4A\pm6p\sqrt{-1}$,
« $4A\pm8p\sqrt{-1}$, $4A\pm10p\sqrt{-1}$, $4A\pm12p\sqrt{-1}$,
« $4A\pm14p\sqrt{-1}$, $4A\pm16p\sqrt{-1}$, $4A\pm18p\sqrt{-1}$
« $4A\pm20p\sqrt{-1}$, $4A\pm22p\sqrt{-1}$, $4A\pm24p\sqrt{-1}$
« $4A\pm26p\sqrt{-1}$ &c. tra' quali compariscono
« no tutti i valori trovati per $4la\sqrt{-1}$, e
« tutti i valori di $4la$, senza però che ve-
« runo dei secondi combini con veruno
« dei primi. Si avrà dunque tanto $4la\sqrt{-1}$,
« quanto $4la = la^4$ senza però che si pos-
« sa da ciò conchiudere l'equazione
« $4la\sqrt{-1} = 4la$; o $la\sqrt{-1} = la$ [illegible]

« Opporrà forse taluno che essen-
« do infiniti [illegible]
« vrà essere ancora necessariamente
« $l-a + l-a = l+a + l+a$, [illegible],
« e però $l-a = l+a$ [illegible]
« come prima, [illegible] il va-
« lore di $l-a$, e di $l+a$, [illegible]
« lora necessariamente [illegible]
« $l+a$; ma [illegible]

[illegible]

* dalla equazione
$l-a + l-a = l+a + l+a$

« l–a, e di l+a, perchè l'equazione
« l–a = l+a + l+a sia vera, altro non si ri-
« chiede se non che la somma di due valori
« qualunque di l–a si trovi sempre eguale
« alla somma di due altri valori di l+a. »
« Ora questa appunto sempre si verifica,
« perchè se nella serie $A \pm p\sqrt{-1}$, $A \pm 3p\sqrt{-1}$,
« $A \pm 5p\sqrt{-1}$, $A \pm 7p\sqrt{-1}$, $A \pm 9p\sqrt{-1}$ &c. che
« rappresenta gli infiniti logaritmi di –a
« si prendano due termini qualunque,
« la loro somma sarà sempre eguale alla
« somma di due termini da prendersi
« nella serie A, $A \pm 2p\sqrt{-1}$, $A \pm 4p\sqrt{-1}$,
« $A \pm 6p\sqrt{-1}$, $A \pm 8p\sqrt{-1}$ &c. rappresentante
« gli infiniti logaritmi di +a. Così la som-
« ma dei termini $A + 5p\sqrt{-1}$, $A - 7p\sqrt{-1}$ del-
« la prima serie è eguale alla somma
« dei termini A, ed $A - 2p\sqrt{-1}$ della se-
« conda. »

Non v'ha dubbio, che le contraddizioni che s'incontravano nelle due opinioni del Bernoulli, e del Leibnitz nascevano dalla supposizione, che ad ogni numero non potesse corrispondere che un solo logaritmo. A questa si aggiunga l'altra egualmente falsa, che un logaritmo non possa riferirsi che a un solo numero. La logistica curva trascendente ha infiniti rami; due reali, e gli altri immaginarj, dai quali vengono le origine i numeri, ed i logaritmi immaginarj. Il Bernoulli per altro, che sosteneva poter essere $l{-1} = 0$, sapeva altresì poter

competere

comperare a $l\text{-}1$ il valore $p\sqrt{-1}$, così ri=
chiedendo la stabilita proporzione $\sqrt{-1}$
: $l\text{-}1$ fra il diametro, e la circonferenza
circolare. Risulta la falsità della pre=
detta supposizione dalla risoluzione del
Problema pubblicato dal Sig.r Ab. Pessuti;
dalla quale, ridotta che sia alla total
estensione di cui è capace, si raccoglie
tutto il contrario di quello ha giudicato
il Sig.r Ab.e, cioè a dire la decisione della
quistione a favore del Bernoulli, e
contro al sentimento di Leibnitz.

Accorda il Sig. Ab. Pessuti, che sia
$l(-a)^2 = l(+a)^2 = la^2$. A la^2 si assegni
un dato valore per esempio $2A+2p\sqrt{-1}$;
si noti che le formole $2l\text{-}a = la^2$, $2la = la^2$ ammesse dal Sig. Ab.
suppongono il protonumero $=1$, il cui
logaritmo $=0$. Presa la metà di la^2
$= 2A+2p\sqrt{-1}$, io avrò una serie arit=
metica di logaritmi 0, $A+p\sqrt{-1}$, $2A+2p\sqrt{-1}$,
alla quale deve corrispondere per la na=
tura della logistica una serie geome=
trica di numeri, che si ottiene prendendo
una media geometrica fra 1 ed a^2: ma
questa media s'agguaglia a $\pm a$; dun=
que ad amendue le serie geometriche
di numeri $1, +a, a^2 : 1, -a, a^2$ si
riferisce la stessa serie aritmetica di
logaritmi 0, $A+p\sqrt{-1}$, $2A+2p\sqrt{-1}$, e per
conseguenza $l\pm a = A+p\sqrt{-1}$. Se fosse
vero quello che sostiene il nostro Auto=
re, bisognerebbe dire, che assegnato a
la^2 il valore $2A+2p\sqrt{-1}$, io dovessi pren=
dere fra 1, ed a^2 la sola media geome=
trica $-a$; perchè $A+p\sqrt{-1} = l\text{-}a$, e non

a

a la, ed assegnato a la^2 il valore $2A + 4p\sqrt{-1}$, si dovessi prendere fra 1 ed a^2 la sola media geometrica $+a$; perchè $A + 2p = la$, e non a $l-a$. Ma dall'estensione da me data al mentovato problema deducendosi chiaramente, che a $l\pm a$ competono gli stessi valori, ne segue che fra i numeri 1, a^2 mi è sempre concesso di collocarci l'una e l'altra media geometrica $\pm a$, onde alle due progressioni geometriche di numeri 1, a, a^2; 1, $-a$, a^2 corrisponda la medesima progressione aritmetica di logaritmi, che nell'esempio addotto sarebbe 0, $A+p\sqrt{-1}$, $2A+2p\sqrt{-1}$, il cui termine medio si eguaglia a $l\pm a$.

Curioso è il ripiego, di cui si vale il Sig. Ab. Cassuti per provare $l-a + l-a = l+a + l+a$, affermando altro non richiedersi se non che la somma di due valori qualunque di $l-a$ si provi sempre eguale alla somma di due altri valori di $l+a$, il che sempre si verifica qualmente egli prova. Si faccia per esempio $l-a = \begin{cases} A+5p\sqrt{-1} \\ A-3p\sqrt{-1} \end{cases}$, e $l+a = \begin{cases} A \\ A-2p\sqrt{-1} \end{cases}$ e la somma di queste due coppie di logaritmi si eguaglierà a $2A \pm 2p\sqrt{-1} = la^2$. Fatto $l-a = A+5p\sqrt{-1}$, alla serie geometrica di numeri 1, $-a$, a^2 corrisponderà la serie di logaritmi 0, $A+5p\sqrt{-1}$, $2A-2p\sqrt{-1}$, che non è aritmetica contro la natura della logistica. Lo stesso inconveniente si incontra ponendo $l-a = A+2p\sqrt{-1}$, $la = A$, $la = A-2p\sqrt{-1}$. Si eviterà il disordine assegnando a $l\pm a$ un solo

valore

valore; che sia la metà di quello di la^2, onde sendo $l{+}a = \frac{1}{2}la^2$, $l{-}a = \frac{1}{2}la^2$, si abbia per conseguenza $la = l{-}a$. Stabilito a la^2 un dato valore, è parimente determinato il relativo valore di $l\pm a$, e variandosi quello, si cangia anche questo, essendo capaci la^2, e $l\pm a$ di infiniti valori relativi.

Resta che io dica qualche cosa intorno alla verità della formola $la\sqrt{-1} = la$ negata dal Sig.r Ab. Pessuti. Ho provato di sopra essere generalmente $l\pm a\sqrt{-1} = \frac{1}{4}la + \frac{1}{4}l{-}a$; e quindi $4l\pm a\sqrt{-1} = 2l{+}a + 2l{-}a$. Se $\pm a$ ricevano lo stesso logaritmo, che per le due dimostrazioni può loro competere, si avrà $4l\pm a\sqrt{-1} = 4l\pm a$, e perciò $l\pm a\sqrt{-1} = l\pm a$. Che se $\pm a$ accettino diversi logaritmi, si avvererà sempre la formola generale $4l\pm a\sqrt{-1} = 2la + 2l{-}a$. Sia $la = A$, ed in tale ipotesi ne risulterà $4la\sqrt{-1} = 4A + 2l{-}1$, e per conseguenza $la\sqrt{-1} = A + \frac{1}{2}l{-}1$. Se a $l{-}1$ si attribuiscano quei soli valori che gli assegna il Sig.r Ab. Pessuti $= \pm p\sqrt{-1}$, $\pm 3p\sqrt{-1}$, $\pm 5p\sqrt{-1}$, $\pm 7p\sqrt{-1}$ &c. si scoprirà $la\sqrt{-1} = A \pm \frac{1}{2}p\sqrt{-1}$, $A \pm \frac{3}{2}p\sqrt{-1}$, $A \pm \frac{5}{2}p\sqrt{-1}$, $A \pm \frac{7}{2}p\sqrt{-1}$ &c. Che se $l{-}1$ si appropj i valori da me determinati 0, $\pm p\sqrt{-1}$, $\pm 2p\sqrt{-1}$, $\pm 3p\sqrt{-1}$, $\pm 4p\sqrt{-1}$, $\pm 5p\sqrt{-1}$, $\pm 6p\sqrt{-1}$, $\pm 7p\sqrt{-1}$ &c. ne proverrà $la\sqrt{-1} = A$, $A \pm \frac{1}{2}p\sqrt{-1}$, $A \pm p\sqrt{-1}$, $A \pm \frac{3}{2}p\sqrt{-1}$, $A \pm 2p\sqrt{-1}$, $A \pm \frac{5}{2}p\sqrt{-1}$, $A \pm 3p\sqrt{-1}$, $A \pm \frac{7}{2}p\sqrt{-1}$ &c., la metà dei quali valori è comune a $l\pm a$. Cangiato il valore di $l\pm a$, si muteranno parimente quelli di $l\pm a\sqrt{-1}$.

La

Le controversie con moderazione trat-
tate riescono utili; quando conducono
allo scoprimento di qualche verità; il
che mi confido d'aver ottenuto, essendo-
mi riuscito, mediante l'ampliazione della
bella scoperta del profondissimo Eulero,
e della elegante dimostrazione del Ch.
Sig. Ab. Lassuti, di chiaramente provare
anche per questa strada, che due numeri
eguali, uno positivo, e l'altro negativo
richiedono i medesimi logaritmi.

§. 3. e 4.

Accordo ben volentieri al Sig. Ab. Lassuti
che sia errore di stampa il leggersi alla
pag. 44. del Tomo I. del Giornale di Modena
logaritmo CG in luogo di logaritmo di CG,
e senza più passo al §. 4.

Alla pag. 45. così si esprime il Sig.
Ab. Lassuti. Siccome nel caso che un'
equazione del terzo grado sia irreducibi-
le, cioè abbia tutte tre le radici reali,
essa si può non pertanto sciogliere colla
trisezione dell'angolo; così tutte quelle,
che sono comprese sotto la sua formola,
in una sezione dell'angolo ritrovano
la loro soluzione; cioè ne' seni e cose-
ni circolari, oppure iperbolici. Questa
maniera d'esprimersi può condurre all'
errore; sembrando che tutte le formole
simili alla cardanica si sciolgano colla
sezione dell'angolo. Ottiene essa l'
intento, quando le formole racchiudono
gl'immaginarj; ma quando non li con-
tengono, egli è d'uopo il ricorrere alla
divisione di un logaritmo analogo
in parti eguali.

§. 5.

§. 5.

Pag. 46. Sembra strano al Co. Riccati, che il Capitolo tratto dal suo Comentario, dov'egli il primo ha insegnato il metodo di ritrovare universalmente la somma generale delle serie, che ne sono capaci, non abbia, come asserisce il Ab. Pessuti, connessione colle cose antecedenti e susseguenti. Numera egli tutti i luoghi delle Istituzioni Analitiche, in cui parla delle serie, e dimostra chiaramente che non si dovea omettere una teoria, che intorno alle serie senza fallo è la più compita, e di cui ne ha fatto un uso sì grande. Non si dovea collocar prima, perchè dipende dalla risoluzione delle equazioni; non dopo, perchè di essa avea immediatamente bisogno per ritrovare la formola generale delle equazioni, che trovano la radice simile alla Cardanica. Il Sig.r Ab. Pessuti giudica pressochè superfluo il Trattato della Sommazione delle serie in un elemento di algebra, ed io penso che un Corso di analisi riuscirà sempre imperfetto, quando delle serie non si faccia parola. Niuno poi ignorerà buono al Sig.r Ab. che il Comentario della somma generale delle serie, opera originale, piena di nuove invenzioni, e tanto applaudita quando uscì in pubblico, sia quasi ormai dimenticato, e che l'Autore abbia voluto assicurargli l'immortalità, riserbando la sua scoperta nelle Istituzioni, che avranno sicuramente

più

più lunga vita. La ha egli introdotta nelle *Istituzioni*, perchè la ha creduta utile, e necessaria, e non per altro fine sicuramente.

§. 6.

Pag. 40. Avrebbe voluto l'Ab. *Pessuti*, che il Co. *Riccati* parlasse più a lungo dei limiti delle equazioni, che nella mancanza de' metodi sono per l'Analista l'unico rifugio. La detta parte da' Sigg. *La Grange* in Berlino, e *Waring* in Inghilterra non ancora condotta alla perfezione li hanno ridotto a non estendersi in una teoria, che allora era non solo imperfetta, ma qualche poco fallace, essendo stato suo costume di non esporne veruna, che non fosse fornita di rigorosa dimostrazione.

§. 7.

Pag. 43. Asserisce il Sig. Ab. *Pessuti*, che meritava per lungo un *trattato compito* delle estrazioni delle radici delle quantità irrazionali a parte sorda, perchè sono esse di un uso necessario per la risoluzione aritmetica delle formole dell'Autore simili alle Cardaniche. Con queste parole egli insinua che doveva esporre un metodo per trovare la $\sqrt[3]{m \pm \sqrt{n}}$, essendo m, n numeri razionali. Si protesta il Co. *Riccati*, che imparerebbe ben volentieri così fatto metodo dal Sig. Ab. *Pessuti*. Il *Bombelli* è stato il primo, che ha dato qualche esempio di cotali radici. Appresso il *Wallis* ne ha trattato più a lungo, dando il metodo come suo; ma l'*Allegri* non ammette

una

una tale universalità, e giudica più facile ritornare all'equazione del grado 4° per ritrovar la radice; che risolvere quei binomj. L'osservazione dell'Allejo è stata appieno approvata dal Mairan; ed è insieme [illegible] il Wallis di avervi a sè attribuita l'invenzione del Bombelli.

Ricorda il Sig. Ab. Cossali al Co. Riccati, che dopo aver nominato il Bombelli ed il Wallis, poteva anche aggiungervi il Newton, il Mac-Laurin, il Clairaut, e l'Eulero, i quali hanno pretesa anche di più; cioè di insegnare il metodo universale per trovare $\sqrt[n]{\pm\sqrt{m}\pm\sqrt{n}}$, di cui $\sqrt{m\pm\sqrt{n}}$ non è che un caso particolare. Si persuada il Sig. Ab. Cossali, che l'Ab. Vincenzo era indefesso nella lettura, ed io ne son buon testimonio, e che avendo provata difettosa la regola data dai lodati Scrittori, [la ha posta in] non ne ha fatto uso nelle Istituzioni Analitiche. Egli ha poi fatto menzione soltanto della formula $\sqrt{m\pm\sqrt{n}}$; perchè questa sola è indicata nell'estratto colle parole sopra citate.

Mostrando il Sig. Ab. Cossali il suo [per usar bravura] valor nell'Analisi, si ristringe al metodo di estrarre la radice dai binomj irrazionali del 2° grado, sperando di spargere nuova luce sopra questo argomento, che confessa comunemente trascurato, e non bastantemente rischiarato negli elementi; il che giustifica la ragionevole ommissione del Co. Ab. Riccati. Ecco il risultato delle utili sue ricerche. Egli fa vedere che la regola di Newton rigorosamente non procede, se

non

fuori nel caso solo in cui la radice del binomio irrazionale $A+B$ non debba avere alcun divisore, che A sia razionale, e che A^2-B^2 sia una potenza dello stesso grado della radice cercata; che per altro gli altri casi si potrianno ridurre con varj artifizj alla regola medesima, e che finalmente l'estrazione della radici non si potrà avere nel solo unico caso, in cui il di lei esponente (essendo) non sia divisibile nè per 2, nè per 3; queste osservazioni unite all'altra del Clairaut, cui egli riferisca, servono a escludere la regola del Newton, e a dimostrare assai più incompleta, ed inesatta quella, che ha preteso sostituirle il Castelli; e se fossero state note al Co. Riccati avrebbe potuto introdurle nelle Istituzioni Analitiche, e gli avrebbe reso giustizia.

^ le suddette radici debbano avere un divisore razionale.

§ 4.

Pag. 47. La regola del Newton per ritrovare il numero delle radici immaginarie, sebbene il più delle volte sia vera, pure in alcune occasioni è fallace; e per tale riconosciuta dai suoi medesimi Inglesi [illegible] in cambio di questa ne hanno data un'altra più inviluppata, la quale prova non si è ritrovata infallibile; ma non essendo munita di alcuna dimostrazione, per tal cagione il Co. Vincenzo si è astenuto di esporla, attendendo sopra ciò un pieno lume dalle meditazioni dei Sig.ri La Grange, e Waring

§ [illegible]

Pag. 53 [illegible] la dimostrazione, che dà il Sig. Ab. Russini dalla quadratura del trilineo parabolico. Imperciocchè, quando la flussione dx equivale col nulla, la somma di tutti i rettangoletti ydx si agguaglia esattamente al detto trilineo: ma per l'equazione dello stesso $\frac{x^2}{a}=y$, e $ydx=\frac{x^2dx}{a}$; qualunque valore ad x si attribuisca; dunque la somma di tutti gli elementi $\frac{x^2dx}{a}$ eguali in grandezza ed in numero agli elementi ydx pareggerà il mentovato trilineo: e perchè la medesima somma si agguaglia alla quantità $\frac{x^3}{3a}$, di cui $\frac{x^2dx}{a}$ è la flussione, perciò sarà il trilineo parabolico $=\frac{x^3}{3a}=\frac{xy}{3}$; il che &c. Nell'integrare la flussione $\frac{x^2dx}{a}$ non si è aggiunta costante; perchè tanto il trilineo, quanto la grandezza $\frac{x^3}{3a}$ sono eguali a nulla, quando $x=0$.

Avrebbe [illegible] il Co. Vincenzo, che la dimostrazione del Sig. Ab. fosse esposta con quella precisione, che si rende necessaria nelle curve assintotiche, nelle quali senza non è facile a dimostrare, che la somma di tutti i rettangoli si accosta oltre ad ogni limite allo spazio curvilineo, sebbene dall'ultimo rettangolo ciò si dimostri con tutta facilità.

§ 10.

Pag. 219 Tom. 2. È stato disegno del

del Sig.r Co. Ab. Riccati di unire insieme il calcolo differenziale e integrale, divi=dendolo però in due parti. Nella prima tratta delle prime differenze, nella seconda delle differenze seconde e ulteriori. Divide la prima in due libri. Nel primo tratta di quella parte del calcolo differenziale e integrale, che introduce o scioglie formole composte di una sola variabile. Egli è vero che mostra da principio la differenziazione ed integrazione di alcune semplicissime formole a due variabili, perchè ne fa uso in appresso in alcune formole di una variabile e ciò la facilità ed eleganza permette agli Autori una sì discreta libertà. Nella seconda parte contenuta nel terzo libro parla del calcolo differenzio-differenziale, e del suo integrale. Egli si è appigliato a questo metodo, perchè sendo più spedito del comune, riesce ugualmen=te chiaro, e facile ai principianti, della qual verità ne possa fare testimonianza. Non vedervi (dice il Co. Vincenzo nella sua Lettera all'Ab. Pessuti, che avea disapprovato un tal metodo) che voi o Sig.re vogliate obbligare gli Autori a seguire quel metodo, che voi vi siate proposto, e che altri Autori hanno lodevolmente seguito...

§ 11.

Pag. 221. Per supplire alla mancanza del Co. Riccati, ed a ciò che

avea

avea insegnato, che se sia o $dy = 0$, o $dy = \infty$, si ha sempre la tangente parallela alle assisse, od alle ordinate, ma non sempre una massima od una minima ordinata, aggiunge una regola tratta dal Mac-Laurin, che se svanendo la dy, non isvanisca la ddy, ovvero svanendo questa, svanisca ancora la d^3y, ma non d^4y, e generalmente se le differenze evanescenti sieno in numero dispari, vi avrà massimo o minimo; ma non vi avrà se sieno in numero pari". Dispiacendo al Sig.r Ab. Cassuti di non trovar questa regola in un luogo, ove cadeva così in acconcio; dovea riflettere, che mostrandosi tanto sollecito del metodo, avrebbe ragione di accusare il Co. Riccati, se ivi l'avesse posta; imperciocchè, qualunque ella siasi, esige il calcolo differenzio-differenziale, che al terzo libro era riservato. La dimostrazione generale si legge nel cap. 15. del lib. 3°, dove si vede notato che non sempre ci è lecito di determinar colla serie
$y \pm dy + \frac{ddy}{2} \pm \frac{d^3y}{2\cdot 3} + \frac{d^4y}{2\cdot 3\cdot 4}$ &c relativa ad $x \pm dx$ l'indole dei punti singolari; perchè se tutte le differenze si ritrovino $= 0$, essa dipende da quei termini, che nelle successive differenziazioni si omettono.

Da un elegante picciolo Trattato sulle Affezioni delle Curve del ch. Sig.r Ab. Frisi inserito in una Raccolta di varie Dissertazioni stampata in Lucca nel 1759, ha preso il Sig.r Ab. Cassuti la mentovata

regola

regola, deducendola dall'equazione
$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ &c.; e col affermare
potersi ridurre l'equazioni di qualun-
que curva. Riflette l'Ab. Riccati, che
questa altro non è che l'equazione della
più semplice paraboloide, e che l'equa-
zione a cui ridur si possono quella della
curva algebraica si è la seguente
$Ax + By + Cx^2 + Dxy + Ey^2 + Fx^3 + Gx^2y$
$+ Hxy^2 + Iy^3$ &c. $= 0$, dalla quale nel
primo tomo ha ricavato l'indole e la
natura dei punti singolari, onde si
renda manifesto se v'abbia massimo
o minimo.

Cerca il Sig.r Ab. Lassuro di difen-
dere l'asserzione sua, dal Mac-Laurin
e dall'Ab. Frisi allegando, che l'Intro-
duzione all'Analisi delle Linee Curve
del Sig.r Cramer ci insegna, "che per mez-
" zo del Parallelogrammo di Newton si
" potrà sempre dall'equazione $Ax + By$
" $+ Cx^2 + Dxy + Ey^2$ &c. $= 0$ dedurre quest'
" altra $y = A' + B'x^m + C'x^n + D'x^p$ &c.,
" ~~senza che sia necessario~~ della quale
" si farà puntualmente l'uso medesimo,
" che ha fatto l'Ab. Frisi per ricavarsi
" la dimostrazione del Teorema Mac-Lau-
" riniano. Anzi siccome per la verità
" di questo Teorema basta dimostrare la
" possibilità dell'equazione $y = A' + B'x^m$
" $+ C'x^n$ &c. senza che sia necessario
" di aver un metodo per attualmente
" determinarla in ogni caso particolare,

si

« si potrà anche dire che riguardando
« y come incognita nell'equazione Ax
« $+ By + Cx^2 + Dxy + Ey^2$ &c. $= 0$, ed am=
« mettendo la risoluzione dell'equazioni,
« la quale se non è data, almeno è pos=
« sibile, si dovrà sempre avere $y = X$
« intendendo per X una funzione qua=
« lunque di quantità costanti e di x ...
« Ora siccome ciascuna tal funzione si potrà
« sempre coi noti metodi convertire
« in una serie $A' + B'x^m + C'x^n$ &c.; sarà
« perciò ancora sempre possibile di tras=
« formare l'equazione [illegible] di qualunque
« curva $Ax + By + Cx^2 + Dxy + Ey^2$ &c. $= 0$.
« nell'altra $y = A' + B'x^m + C'x^n$ &c. »
[illegible] è di nuopo primieramente
[illegible] che l'equazione $y =$
$A' + B'x^m + C'x^n$ &c. non è la stessa
con quella delle più semplici Parabo=
loidi, potendo gli esponenti m, n
avere valori diversi da quelli
[illegible] &c. che nell'equazione delle
Paraboloidi son contenuti; e quindi
non rettamente i lodati Autori hanno
affermato, che alla formola $y = A$
$+ Bx + Cx^2 + Dx^3$ &c. si possano ri=
durre l'equazioni di qualunque
curva. Mi servirà di esempio l'iper=
bola Apolloniana fra gli assintoti
$y = Bx^{-1}$, in cui ha luogo l'esponente
-1, che non rientra nell'equazione
alle paraboloidi. Si avverta in se=
condo luogo, che risparmiata la tras=
formazione indicata dal Sig.r Ab. Bassuti,

riuscirà

d.

riuscirà più elegante il dedurre dalla equazione generale della curva algebraica non trasformata l'indole e la natura dei punti singolari, qualmente ha fatto nel luogo citato il Co. Ab. Riccati.

Pag. 229. Tom. 2. Approva il Sig. Ab. Rossetti il metodo di esclusione, con cui dal Co. Riccati è stato sciolto il Problema nel tom. 2. lib. 2. cap. 5. delle sue Istituzioni Analitiche, Ritrovare in un triangolo un punto tale, che la somma delle linee condotte agli angoli sia la minima. Non sciogliendosi, a suo parere, con altri metodi il Problema generalmente; questa è la ragione, che l'ha indotto ad abbracciare il metodo mentovato. Ora ciò posto non so capire come leggendo l'estratto del quarto Tomo dell'Accademia di Siena possa dire il Sig. Ab., che il Co. Riccati per isfuggire i nojosi calcoli ha eletto il metodo di esclusione, ch'è alquanto lungo, e che pareva alla sua soluzione anteporre si dava quella del dottissimo Ab. Frisi. Egli avrebbe ragione, se una tal soluzione fosse generale; ma qualmente egli giudica mancando essa di un tal requisito, come n'è priva altresì l'altra dello stesso Ab. Riccati ugualmente semplice che la Frisiana, che si legge nel citato cap. 5 §. 40., per questo motivo ha preferito il metodo di esclusione, che necessariamente

richiede

vedere da qualche maggiore lunghezza. Risponde il Sig. Ab. Bassuti, che non ha parlato della soluzione simile alla Torriana accennata dal Sig.r Ab. Riccati, perchè non appartenevano alcun modo ad essa Sig. Co., ma bensì al grande Inventore del metodo degli Indivisibili Bonaventura Cavalieri, che nella sua Geometria Esercitazioni fu uno de' primi a sciogliere il mentovato Problema proposto dal Sig. Fermat. Io sono persuaso, che non ricordevole di ciò il Ab. Riccati si sia incontrato col Cavalieri, non essendo egli capace di attribuirsi le cose altrui, e molto meno di sopprimere quella parte della soluzione del Cavalieri, che dimostra, che quando uno degli angoli del triangolo sia eguale o maggiore di 120°, questo medesimo angolo sarà il punto, che soddisfarà al Problema, per dare a credere che la sola sua soluzione trovata col metodo di esclusione era generale, e l'altre rette mancanti. Non è degna questa accusa del Sig.r Ab. Bassuti, ed è sommamente ripugnante al carattere onesto, ingenuo, modestissimo, ed amabilissimo del Sig. Co. Ab. Vincenzo Riccati.

Ma lasciando questo da parte, sarà meglio ch'io aggiunga una riflessione, che mi sembra importante. Li angolo A C B. (fig. 3.) sia di gradi 120 e venga diviso per mezzo

dalla

dalla retta DCH, dimodochè anche
gli angoli ACD, BCD siano di grado
diverso, e debba taglia la linea $HD > HC$,
hanno dimostrato il *Cavalcanti*, li Ab.
Frisi, ed il Co. *Riccati* essere minima
la somma $AC + BC + DC$: ma se
prendo $HD' < HC$, la somma AC
$+ BC + D'C$ non è più minima; per
quindi sembra non essere generale
la soluzione delli Ab. *Frisi* non meno
che quella contenuta nel tom. 2. lib. 2.
cap. 5. § 40 delle *Istituzioni* delli Ab.
Riccati. Io credo pertanto che le
predette soluzioni si possano dimos-
trar generali nella seguente ma-
niera. Quando $HD > HC$, la
linea DC dee considerarsi come po-
sitiva, ed in tal caso la somma AC
$+ BC + DC$ è minima. Che se $HD' < HC$,
la linea $D'C$ ha da prendersi come
negativa, e perciò diviene minima
la somma $AC + BC - D'C$. Sia CG
infinitesima, e coi centri A, B,
ed i raggi AG', BG' descritti gli
archetti $G'7'$, $G'e'$, ha dimostrato
il Co. *Vincenzo* tom. 2. lib. 2. cap. 5. § 33.
essere $C7' + Ce' = GG'$. Ora se è
minima la somma $AC + BC - D'C$,
dovrà trovarsi per la legge dei *massimi*
e dei *minimi* $AC + BC - D'C = AG'$
$+ BG' - D'G'$: ma $AC = AG' + 7'C$,
$BC = BG' + e'C$, $D'C = D'G' + G'C$;
dunque $AG' + 7'C + BG' + e'C - D'G' - G'C$

$= AG'^2 + BG'^2 = D'G'^2$, e quindi $D'C +$ $CC' - G'C$ [illegible], o sia $D'C + CC' = G'C$ come hai dimostrato il Co. Riccati: ... Per la qual cosa la stabilita determinazione del punto C scioglie generalmente il problema, purchè prese le CD in qualità di positive, si assumano le CD' come negative.

\+ Se sia dato il triangolo $AD'B$, si determinerà facilmente il punto C descrivendo sulla base AB il triangolo equilatero AIB, e intorno ad esso il circolo $AIBCA$, e conducendo poscia pei punti I, D' la linea $ID'CK$, che taglierà il circolo nel punto cercato C. La retta HK sarà il luogo dei vertici D', D &c. di infiniti triangoli fondati sulla stessa base AB, ai quali tutti soddisfa il medesimo punto C.

\+ § 13.

Pag. 263. Tom. 2. Nello spiegare il criterio per conoscere, se le formole differenziali di qualunque grado siano o no capaci di integrazione, ommettendo le riflessioni ed i casi più difficili, segue il Sig.r Ab. Rassuti con tutta esattezza il metodo del Co. Riccati, il quale perciò non sa vedere per qual ragione lo accusi di oscurità, e si esprima di rimpastar la materia in grazia de' principianti. Si protesta il Sig.r Ab. Rassuti nella sua risposta di non aver già inteso di trattar questo argomento con nuovo metodo, e distesamente, ma solo di esporne i fondamenti con maggiore chiarezza.

Conchiuderò col riportare le espressioni, colle quali termina la sua Lettera il Sig.r Co. Ab. Riccati, che se in me non fosse grandissima la stima che faccio del Sig.r Ab. Rassuti e del suo sapere, non mi sarei preso il pensiere di esaminare minutamente la sua dotta Risposta. Comprenderà egli, che per quanto sia

somma

somma la gratitudine, e la venerazio-
ne che professo per l'illustre *Defunto*,
ho avuto sempre mira alla verità,
che dovrebbe essere l'unico fine
della onesta e moderata scientifi-
ca controversia.

H
B

Sopra i Logaritmi dei Numeri
negativi
Lettere cinque del Sig.r Co. Ab.
Vincenzo Riccati
al Sig.r Ab. Iacopo Bellizzari
allora Professore di Fisica, e di
Geometria nel Seminario di
Treviso,
alle quali se ne aggiunge una del
Sig.r Co. Giordano Riccati.
nel Giornale di Modena Tomo XVI. pag. 137.

1779

Saranno

Lettera di Vincenzo Riccati al Sig.r Ab. Jacopo Bellizzari [?] Professore di Geometria e di Fisica nel Seminario di Treviso.

Sig.r Ab. Rev.mo

Se i logaritmi delle quantità negative siano tutti immaginarj, oppure abbiano un valore reale, ella è, Sig.r Ab. Rev.mo, una controversia, che sin dall'anno 1712. incominciò a discutersi da due sommi uomini Gottifredo Leibnizio, che tutti li volea immaginarj, e Giovanni Bernoulli, che eguali li sosteneva ai logaritmi delle quantità positive, come apparisce dalla lettera 190. e seguenti del loro commercio epistolico. Comunque per l'una parte venisse cer=cando [?] le sue ragioni con forza ed energia, e per l'altra leggesse le altrui con animo amichevole e docile; pure niun de' due si lasciò vincere e persuadere, ma fermo rimase nella conceputa opinione. Seguì dopo molti anni l'acutissimo Sig.r Eulero, il quale nelli Accad. di Berlino con nuove ragioni sostenne il partito del Leibnizio: vennero nelli Accad. di Turino le ragioni dell'Eulero dal Cav. Daviet da Foncenex approvate, e corroborate con ingegnosissime riflessioni sue, e dal Sig. Filippo de la Grange. Esamina cosiffatta scrittura nelli opusc. 6. [?] del p.mo tomo il dottissimo Sig. d'Alembert, e sebben si protesti di non voler decidere

la

saranno

la quistione, pure dà a divedere chi egli propende alle opinioni del Bernoulli. Risponde il Foncenex nel tomo seguente, e benchè parecchie volte ceda all'Alembert; pure dalla sua opinione non si diparte. I sommi uomini, chi entrati sono, e forse inutilmente, in tale quistione, dichiararono assai esser essa stranamente difficile ed intralciata.

Incomincio coll'esporre nella massima semplicità le due ragioni, che fanno nascere la quistione: appresso vi scriverò schiettamente quello, che me ne pare, sottomettendo il tutto al purgato vostro giudizio. Tre son le equazioni, chi racchiudono il sistema de' logaritmi, e ci forniscono le equazioni della logaritmica. Eccole .. $dy = \frac{c\,dx}{x}$, $y = lx$, $f\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{y}{c}} = x$, posti i numeri $= x$, i logaritmi $= y$. Voi vedete, che la specie f esprime il protonumero, c la sottotangente, e la base del sistema logaritmico. Ciò posto riguardano i fautori del Bernoulli la prima equazione, e a un di presso così la discorrono. Questa equazione, la quale, ponendosi in cambio della $+x$ la $-x$, niun cangiamento riceve, evidentemente dimostra, che la stessa ordinata corrisponde tanto alla assissa $+x$, quanto alla $-x$: ma la prima equazione, se alla $+x$ si sostituisca la $-x$, niente si

cangia

cangia, perchè $dy = c.\frac{-dx}{-x} = \frac{cdx}{x}$; dunque nella curva, che rappresenta, all'assissa positiva, e negativa corrisponde la stessa stessissima ordinata: ma le assisse sono i numeri, l'ordinate i logaritmi; dunque i logaritmi delle quantità positive sono eguali a quelli delle quantità negative.

Quindi deducasi, che così fatta curva, che logaritmica, o logistica si suol chiamare, è composta di due rami perfettamente simili ed eguali, come nella figura: AB è il protonumero, AP l'assissa positiva $= +x$, Ap la negativa $= -x$. Se $AP = Ap$, sarà $NP = np$, e i rami della curva saranno MBN, Mbn, che hanno per comun assintoto AM. Perciò $y = l\pm x$: eccovi esposto con semplicità il fondamento della Bernoulliana sentenza.

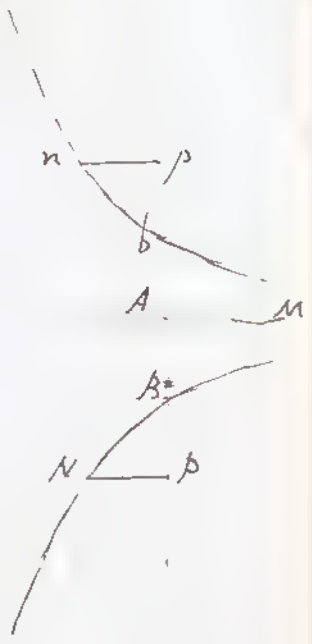


Fig. 1

Quei, che seguono il Leibnizio, si mettono sotto degli occhi la terza equazione, e così ragionano: egli è impossibile di assegnare generalmente al logaritmo y così fatto valor reale, onde la quantità $\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{y}{r}}$ divenga negativa; dunque essendo y reale, non può il numero x divenir negativo; dunque al numero $-x$ non corrisponde alcun logaritmo y reale, ma tutti sono immaginarj. Quindi la curva logaritmica ha un solo ramo, cioè MBN

MBN., e dall'altra parte dell'assintoto AM non v'ha rami, se non se immaginarj. Eccovi due schiette dimostrazioni l'una opposta all'altra diametralmente.

Vengo ad isvelarvi il mio sentimento, di cui però vi prego a sospendere il giudizio, finchè avrete compita la lettura di questa lettera. Fa di uopo osservare, che le tre costanti, cioè protonumero, sottotangente, e base; che riguardansi ne' sistemi logaritmici, non sono intieramente arbitrarie, ma che date due, la terza viene ad essere per esse determinata. Così dato il protonumero e la sottotangente, si determina la base, e dato il protonumero e la base, si determina la sottotangente. In tutte tre le equazioni premesse ci entra almeno implicitamente il protonumero f; perchè in tutte supponesi $lf = 0$. Nella prima v'ha la sottotangente, ma non la base; nell'ultima v'ha la base, non la sottotangente. Quindi nella seconda, se si trae dalla prima, dee considerarsi come data la sottotangente; se si ricava dalla terza, ella inchiude la base logaritmica. Le quali cose poste, propor si possono due diversi problemi, che non si vogliono insieme confondere. Il primo si è; dato il protonumero, e la sottotangente,

descrivere

descriver la logaritmica, e deter=
minar il sistema: l'altro; dato il
protonumero, e la base, determinar
la logaritmica, ed il sistema. La
soluzion del primo problema ci
conduce ad una curva dotata di
due rami, e ad un sistema, in cui
i logaritmi delle assisse negative
sono eguali a que' delle positive,
siccome vuole la prima ragione.
La soluzione del secondo porge una
curva composta di un solo ramo,
in cui alle sole assisse positive
corrispondono le ordinate, o siano
logaritmi reali, come prova la se=
conda ragione.

Io temo, che questa mia deci=
sione vi sembri strana, e incredi=
bile. E come mai, direte, può adi=
venire, che la terza equazione, in
cui è data la base, dia sol la metà
di quella curva, che ci fornisce la
equazione prima, in cui è data
la sottotangente? E non si ricava
la terza dalla prima, e la prima
dalla terza con discorso geometrico?
Appunto il considerare, come le
une equazion dalle altre derivan,
toglierà ogni specie di paradosso al
sentimento, che v'ha proposto.
Riguardo come dalla prima si pas=
si alla terza. Si integra la
prima, supposta la sottotangente
$= c$; e si ha la seconda. Sia la
base logaritmica $= a$, onde $la = f$.
La seconda si potrà esprimer così
$y\,la = lx$, da cui provien la terza.
Codesta base $= a$, che vuol deter=

minarsi

saranno

mirànsi per f, c, ha ella un solo valore? No certamente, essendo anzi una funzione infinitiforme, cioè che ha infiniti valori espressi per f, c ... Ciò apparirà chiaramente, se ci metteremo sotto degli occhi la formola, onde il logaritmo è dato pel numero. Voi la ritroverete nel primo tomo de' miei opuscoli, e nel primo libro del secondo tomo delle Instituzioni, ove l'ho inserita. Essa è la seguente

$$l\,f\cdot\frac{f+x}{f-x} =$$

$$2c\cdot\frac{x}{f}+\frac{x^3}{3f^3}+\frac{x^5}{5f^5}+\frac{x^7}{7f^7}\ \&c.$$

Si faccia $f\cdot\frac{f+x}{f-x}=a$, onde il suo logaritmo $=y$. Si avrà $x=f\cdot\frac{a-f}{a+f}$; dunque, fatte le sostituzioni

$$\frac{y}{2c}=\frac{a-f}{a+f}+\frac{\overline{a-f}^3}{3\cdot\overline{a+f}^3}+\frac{\overline{a-f}^5}{5\cdot\overline{a+f}^5}+\frac{\overline{a-f}^7}{7\cdot\overline{a+f}^7}\ \&c$$

Chi non vede che il grado dell'equazione è infinito, onde la a ha infiniti valori dati per y, c. Acciocchè la terza formola dia tutta intera la serie, che viene dalla prima somministrata, conviene riguardare la a come infinitiforme, e assegnarle tutti i valori, che può ricevere reali, ed immaginarj. Dato qualunque valore del logaritmo y, vi sarà sempre un tal valore della a, onde la quantità $\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{y}{f}}$ divenga negativa,

a

e per conseguenza dia il numero negativo.

Ma quando sia dato il prodotto mero f, e la base a, si assegna a così fatta base un solo, e determinato valore, e questo positivo. Con tale restrizione che maraviglia è mai; che la formola, in cui e si pone di un sol valore, dia soltanto parte di quella curva; che darebbe, se la e avesse infiniti valori? Ma è necessario, che la base e sia infiniti-forme, perché somministri la curva, che vien fornita dalla prima equazione, in cui c è sottotangente; dunque non è maraviglia, che la terza equazione, quando la e sia ristretta ad un sol valore, dia una parte di quella curva, che alla prima equazion corrisponde. Per tanto è chiaro il senso, in cui ho detto, che data la base, la terza equazione fornisce il solo ramo MBN della logaritmica.

All'opposto volendosi passare dalla terza equazione alla prima, e dovendosi determinare c per f, e, si avverta, che c ha un solo valore, ed è una funzione uniforme e questa quantità sempre risulta la stessa, qualunque degli infiniti valori abbia la base e, che possono essere le = f. Adunque se la e si ponga data e determinata, facendola svanire, e introducendo la c, dee necessariamente nascere una formola più estesa di quella, da

da cui siamo partiti. Questo accade sempremai, quando da un'equazione, la quale contiene una quantità di sua natura moltiforme, a cui sia assegnato un valore determinato, si passa ad un'altra, ove non appariscono se non quantità uniformi. Sia a cagion di esempio $yy = +\sqrt{ab} \cdot x$, in cui alla quantità $\sqrt{ab}$ assegno il solo valor positivo. A questa non corrisponde altra curva, se non una parabola apolloniana. Se si alza al quadrato, perchè abbian luogo le sole quantità uniformi, ella appartiene al complesso di due parabole apolloniane, e per conseguenza è molto più estesa della prima.

Potrebbesi proporre un terzo problema: data la sottotangente e la base logaritmica, descriver la logistica, e determinar il sistema. Dovendosi per la soluzione determinar il protonumero per la sottotangente e la base, si vedrà essere il protonumero una funzione infinitiforme, cui convengono infiniti valori. Perciò non si avranno mai interi i due rami della logistica, quando tutti i valori infiniti del protonumero non si mettano a computo. Ma siccome di tal genere di logaritmi non è stato parlato da chicchessia, perciò più volentieri mi sono trattenuto negli altri due.

Niuno

Niuno dagli eccellenti Scrittori, che ho nominati, ha mai riguardato la quistione da un tal punto di veduta, donde niente si scorga, che non sia chiaro distinto, e ben ordinato. Ciò si farà palese vie più nella lettera seguente, che avrò il vantaggio di scrivervi, dove esaminerò le ragioni, e le risposte da amendue le parti recate. Intanto intorno al contenuto della presente aspetto il vostro giudicio, che pregio assai, e veracemente mi dico

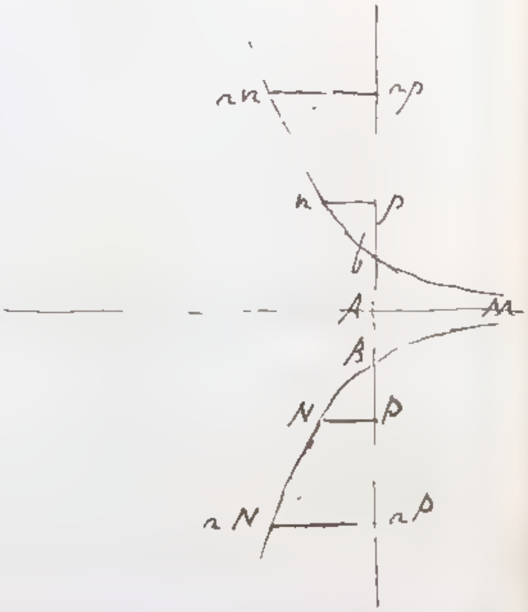
Bologna li 15 Agosto 1767.

Lettera del Co. Giordano Riccati allo stesso.

Sig.r Ab. Riv.mo

Ho ricevuto dal P. Vincenzo mio fratello la inchiusa lettera a Lei diretta, acciocchè dopo averla ben letta e ponderata, gliela spedisca. Sembrami, che con un metodo assai più semplice e chiaro si potesse decidere la quistione a favore del Sig. Giovanni Bernoulli.

E primieramente egli è reale il ramo negativo Mbnan della logistica; perchè io lo posso geometricamente determinare per punti, senza che ne nasca veruna quantità immaginaria. Sia $Ab = -f$; $Ap = -e$, e per conseguenza $pn = f$. Facciasi



Ab

saranno

$Ab : Ap :: Ap : Anp$
$-f : -a :: -a : \frac{a^2}{-f}$, e si determinerà $Anp = \frac{a^2}{-f} = -\frac{a^2}{f}$, a cui corrisponda il logaritmo $Apan = 2f$. Non altrimenti ai numeri $-\frac{a^3}{f^2}$, $-\frac{a^4}{f^3}$, &c. si riferiranno i logaritmi $3f$, $4f$, &c. Prendendo poscia una media proporzionale fra $Ab = -f$, ed $Ap = -a$, ne nasce il numero $-\sqrt{af} = -\frac{a^{\frac{1}{2}}}{f^{-\frac{1}{2}}}$, al quale compete il logaritmo $\frac{1}{2}f$. Con questo artifizio moltiplicando le medie proporzionali, posso determinare innumerabili punti del ramo negativo $Mbnan$, i quali non solo sono reali, ma colla loro genesi chiaramente ci manifestano la realità di quelli, che restano da stabilirsi.

Ora poniamoci sotto gli occhi le tre equazioni $dy = \frac{c\,dx}{x}$, $y = lx$, $f\cdot\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{y}{f}} = x$, e fatta la considerazione, che la sottotangente c è positiva tanto nel ramo positivo MAN, quanto nel negativo Mbn, ella è cosa chiara, che la prima equazione, la quale non ammette salvochè la sola costante c, si adatta ad amendue i rami, potendo essa esprimersi

nella

nella due maniere $dy = \frac{c\,dx}{x}$,
$dy = c. \frac{-dx}{-x}$, la prima delle quali
conviene al ramo positivo MBN,
la seconda al negativo Mbn.
Quindi integrando avremo $y = l\pm x$, equazione che comprende
tutti e due i predetti rami della
logistica.

Rivolgendo la riflessione alle
due altre due costanti, cioè alla
base, ed al protonumero, osservo
che esse sono positive nel ramo
inferiore MBN, negative nel
superiore Mbn. Qual mara=
viglia dunque se essendosi esse
stabilite positive nella terza
equazione, non può quella con=
venire al ramo superiore?
La formola propria del detto
ramo si è la seguente
$-f.\left(\frac{-e}{-1}\right)^{\frac{y}{f}} = x$, o sia $-f.\left(\frac{e}{f}\right)^{\frac{y}{f}} = x$,
e la formola generale $\pm f.\left(\frac{e}{f}\right)^{\frac{y}{f}}$
$= x$. Mi ricercherà ella, perchè
nella equazione competente al
ramo Mbn abbia lasciato il
segno affermativo alla costante
f nell'esponente $\frac{y}{f}$. Rispondo,
che nel nostro ramo la costante
f ha doppiamente luogo e come
protonumero, e come logaritmo
della base e: e conciossiachè
nella prima figura diviene
negativa, e resta positiva nella
seconda; questa è la ragione,

per

per cui nell'esponente $\frac{y}{f}$, dove f significa il logaritmo della base-e, non lo ho cangiato segno. Infatti se alla base $\pm e$ corrispondesse il logaritmo $= 1$, si avrebbe la formola $\pm f\left(\frac{a}{f}\right)^y = x$, in cui posta $y = 0$, ne risulta $\pm f = x$; posta $y = 1$, $\pm a = x$; posta $y = n$; $\pm \frac{a^n}{f} = x$, &c.

Per dir il vero esaminata la lettera di mio Fratello, non sono rimaso persuaso, che sendo date le costanti f, e, la base e possa ricevere infiniti valori, uno de' quali si adatti sempre al relativo valore del logaritmo y, onde la quantità $\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{y}{f}}$ divenga negativa, e per conseguenza dia il numero negativo. Sostenendo egli, che i due rami MBN, Mbn siano perfettamente uguali, e solamente collocati uno al contrario dell'altro, deve parimente concedere l'uguaglianza delle basi, e che queste solo in ciò differiscano, che una è positiva, l'altra negativa.

L'esempio della equazione $abx^n = y^m$, che si costruisca con due parabole apolloniane situate contrariamente, favorisca i miei pensamenti. Dalla

sua Detta

predetta formola si deduca quest'
altra $\sqrt{\pm\sqrt{ab}.\pm x} = \pm y$ la quale
ci mostra a dito la natura della
curva, e che $\pm y$ corrisponde tanto
a $+x$, quanto a $-x$. Cadrebbe
in paralogismo chi esprimendo
la seconda formola così
$\sqrt{+\sqrt{ab}.+x} = \pm y$, sostenesse
che non ci può essere la parabola
posta negativamente; perché
facendo x negativa, diviene
immaginaria la y. Svanisce
l'ingannevole discorso facendo
la riflessione, che ad x negativa
conviene la costante $\sqrt{ab}$ negativa
onde sia sempre positivo il pro=
dotto $\sqrt{ab}|x$, e per conseguenza
reale la sua radice, a cui si egua=
glia $\pm y$. Della diversità dei
ragionamenti di due Fratelli ne rimetto
l'esame a Lei, ed attendo il suo
sincero parere, che stimo rarissi=
mo.

In vano l'ho aspettata a Cas=
telfranco nel suo passaggio per
S. Zenone, ed ella mi ha defrau=
dato della sua gratissima compa=
gnia. Si ricordi, che mi ha da
risarcire in qualche altro incon=
tro, ed io la prego a favorirmi il
prossimo autunno. E con pie=
nissima stima mi pregio di essere.

savanno

Lettera seconda di Vincenzo Riccati al Sig. Ab. Jacopo Belgrado Professore di Geometria, e di Fisica nel Seminario di Treviso

Sig. Ab. Rio.^mo

Io, Sig. Ab. Riverito, ho dedotta nella prima mia Lettera l'opinion Bernoulliana, che la logaritmica è composta di due rami, i quali prendono in mezzo l'assintoto, e che i logaritmi de' ~~numeri~~ de' numeri negativi sono eguali a' logaritmi de' positivi, dalla equazione $dy = \frac{cdx}{x}$, in cui se scrivasi $-x$ in cambio di x, niuna mutazion segue, perchè ho amato di non dipartirmi dalla massima semplicità, ch'io mi era proposta, non perchè giudicassi, esser essa la più forte e gagliarda ragione, che in pro di quella sentenza si potesse recare. Anzi io sapeva la molesta opposizione, onde l'acutissimo Sig. Eulero studiasi di levarle ogni forza, la qual opposizione mi fa dubitare, se l'argomento esposto serbi la geometrica evidenza, e non sia piuttosto una semplice, sebben non dispregevole, conghiettura. Se il non cangiarsi della equazione, sostituendo alla $+x$ la $-x$, prova esser la logaritmica di due rami composta; il non cangiarsi della medesima, sostituendo mx in luogo di x, proverebbe esser tanti i rami della logaritmica, quanti valori si possono assegnare al coefficiente m, cioè a dire infiniti: lo che certamente è assurdo, e non ammesso da chi che

saranno

che sia.

Sembra, che il Sig.r d'Alambert non faccia gran caso di questa opposizione, perciocchè è di avviso, che il coeffiente m non dia alla logaritmica un'infinità di rami, come si pretende provare; perchè le due equazioni $y = lx$, $y = lmx$ appartengono alla stessa logistica, la quale ha soltanto l'origine in diversi punti. Ma questo medesimo; cioè a dire l'esser la stessa logistica situata in diversi luoghi, prova, che l'infinite logistiche non appartengono ad una stessa curva, ma formano una famiglia di curve, che hanno un parametro variabile. Così l'equazione $ax = \overline{y-b}^2$, dando diversi valori alla b, appartiene sempre alla stessa parabola apolloniana in diversi luoghi situata. Nonostante una non ha a fare coll'altra, e non s'ha altro, se non se una famiglia d'infinite curve, il cui parametro è variabile.

Egli è vero, che non accadendo mai nell'analisi, che non si cangi l'equazione scrivendo mx per x, se non nel caso delle quantità logaritmiche, nè si è formato, nè si potrà formare il canone, che tanto alla x,^ quanto alla $-x$ la stessa ordinata corrisponda, se sostituendo l'una all'altra, rimane

^ quanto alla mx corrisponda la stessa ordinata: all'opposto vi ha il canone, che tanto alla $+x$,

rimane l'equazion la medesima. Tuttavolta trattandosi di una equazione differenziale, e di indole interamente diversa da tutte l'altre, si può ragionevolmente dubitare, se il non cangiarsi l'equazione, scrivendo $-x$ per $+x$, provenga dall'avere l'assissa positiva, e negativa la stessa ordinata, ovver da quella qualunque ragione, per cui ponendo mx in luogo di x l'equazion non si cangia: poiché al coefficiente m si può ancora il valore di -1 assegnare.

Le due equazioni $y = lx$, $y = lmx$ nate dall'equazione differenziale $dy = \frac{c\,dx}{x}$, che hanno la sottangente $= c$, danno due sistemi, in cui è diverso il protonumero, il quale nella prima $= f$, nella seconda $= mf$. Il moltiplicare per m la x opera quello, che nell'altre integrazioni l'aggiunta della costante, per cui accade sovente volta, che niente si cangi la curva, ma soltanto la sua posizione. Ciò si renderà manifesto, se nella seconda prendiamo i logaritmi nel medesimo sistema del protonumero $= f$; perché ella si cangia nella seguente $y = lx + lmf$, che altro non è se non la prima equazione coll'aggiunta della costante. Quindi si ricava, che l'ordinate

nella

nelle due curve non differiscono se non per una quantità costante; dunque le loro differenze devono essere le medesime posta la stessa assissa. E questa è la ragione, per cui scrivendo mx in luogo di x, l'equazione differenziale non cangiasi. Si ponga $m = -1$, onde provenga l'equazione $y = l.-x$, la qual si cangia così $y = lx + l.-1$. Se posto il protonumero $= f$, si abbia $l.-f = 0$, quest'equazione coincide colla prima, e per conseguenza i logaritmi de' numeri negativi sono eguali à quelli de' positivi. Ma bisogna non supporre, ma provare, che $l.-f$ non sia sempre immaginario.

L'uso delle serie non giova punto. Per darne un saggio propongo il seguente problema. Esprimere per una serie convergente $l.f.\frac{f+x}{f-x}$ tanto nel caso di $x < f$, quanto nell'altro di $x > f$. Ad ottener le due serie, passo alla formola differenziale

$$\mathcal{D}\,\frac{f+x}{f-x} = \frac{dx}{f-x} + \frac{(f+x)\,dx}{(f-x)^2} = \frac{f\,dx - x\,dx + f\,dx + x\,dx}{(f-x)^2}$$

$$= \frac{2f\,dx}{(f-x)^2}.\ \text{Adunque}\ \mathcal{D}\,l.\frac{f+x}{f-x}$$

$$= \frac{2cf\,dx}{(f+x)\cdot(f-x)} = \frac{2cf\,dx}{f^2 - x^2},$$

in cui c è la sottotangente. Supponendo in primo luogo $x < f$, svolgasi la formola in una serie colla

divisione

Divisione

$$D\,l\,f.\frac{f+x}{f-x} = 2c.\,\overline{\frac{dx}{f} + \frac{x^2dx}{f^3} + \frac{x^4dx}{f^5} + \frac{x^6dx}{f^7}}\ \text{\&c}$$

e integrando

$$l\,f.\frac{f+x}{f-x} = 2c.\,\overline{\frac{x}{f}+\frac{x^3}{3f^3}+\frac{x^5}{5f^5}+\frac{x^7}{7f^7}}\ \text{\&c.}$$

All'opposto essendo $x > f$, si disponga la differenziale così

$$D\,l\,f.\frac{f+x}{f-x} = \frac{-2cf\,dx}{x^2-f^2}$$, la qual

colla divisione si cangia nella serie

$$D\,l\,f.\frac{f+x}{f-x} = 2c.\,\overline{-\frac{f\,dx}{x^2} - \frac{f^3dx}{x^4} - \frac{f^5dx}{x^6} - \frac{f^7dx}{x^8}}\ \text{\&c.}$$

ed integrando

$$l\,f.\frac{f+x}{f-x} = 2c.\,\overline{\frac{f}{x}+\frac{f^3}{3x^3}+\frac{f^5}{5x^5}+\frac{f^7}{7x^7}}\ \text{\&c.}$$

Per avere il $l2$, si faccia $f.\frac{f+x}{f-x} = 2$; dunque $x = f.\frac{2-f}{2+f}$, nella quale è chiaro, esser $x < f$; dunque dovrò servirmi della prima serie. Per aver $l-2$, si faccia $f.\frac{f+x'}{f-x'} = -2$ (ho segnata di sopra la x, per indicare esser essa diversa dalla x del primo caso.) dunque $x' = f.\frac{2+f}{2-f}$, la qual insegna esser $x' > f$; e quindi si vuol far uso della serie seconda. Si avrà pertanto

$$\frac{l2}{2c} = \frac{x}{f}+\frac{x^3}{3f^3}+\frac{x^5}{5f^5}+\frac{x^7}{7f^7}\ \text{\&c.}$$

$$\frac{l-2}{2c} = \frac{f}{x'}+\frac{f^3}{3x'^3}+\frac{f^5}{5x'^5}+\frac{f^7}{7x'^7}\ \text{\&c.}$$

I valori della x, x' insieme moltiplicati danno $xx' = ff$; dunque $x' = \frac{ff}{x}$. Sostituito in luogo di

x'

x' il suo valore nella seconda serie, si otterrà

$$\frac{l-z}{nc} = \frac{x'}{1} + \frac{x'^3}{3\,1^3} + \frac{x'^5}{5\,1^5} + \frac{x'^7}{7\,1^5} \text{ \&c.},$$

la qual serie è la medesima colla prima; dunque $lz = l-z$, la qual conseguenza sembra, che dia dimostrato, esser eguali i logaritmi de' numeri positivi, e negativi.

Tuttavolta si avverta, che conviene porre $x=0$, acciocchè la prima serie diventi $=0$, onde sia $lz=0$: ma posto $x=0$, si fa $z=1$; dunque $l1=0$. Nella prima serie adunque si avrà per protonumero $+1$. Ma affinchè si annulli la seconda serie, vuol porsi $x'=\infty$: ma in questa supposizione $-z=-1$, o sia $z=1$; dunque nella seconda si ha il protonumero $=-1$. Pertanto altro non si dimostra, se non che i lz nel sistema del protonumero $=1$ sono eguali ai $l-z$ nel sistema del protonumero $=-1$. Ma non s'è ancor dimostrato, che questi due sistemi si uniscano in un sistema solo, e continuato.

Il dottissimo Sig. d'Alembert accenna il metodo delle analogie. Riguarda l'equazione $dy = \frac{c^p dx}{x^p}$, in cui p sia dispari. L'integrazion fa vedere, che la curva, la qual soddisfà a questa equazione, in

in tutti i casi di p o positiva, o negativa, eccettuato $p = 1$, è composta di due rami, per modo che le x positive, e negative hanno una stessa ordinata: ma il caso di $p = 1$ sta fra mezzo essendo p dispari; dunque anche in questo caso la curva, ch'è la logaritmica, dee esser dotata di due rami, onde l'ordinate dell'assisse positive sien le medesime che le ordinate delle negative. La congettura è gagliarda, ma rimane dentro i confini di congettura. Perciocchè siccome nel caso di $p = 1$ l'equazione non è algebraicamente integrabile, benchè in tutti gli altri lo sia; così potrebbe avvenire, che la curva avesse un ramo solo dalla parte dell'assisse positive, sebbene l'altre ne abbiano dalla parte delle negative un secondo.

Dappoichè l'algebra di per se non è valevole di sgombrare ogni dubbietà, ricorriamo alla geometria, la qual forse ci parlerà con linguaggio più chiaro. Ritorno col lodato Sig.r d'Alembert all'equazione $dy = \frac{c^p dx}{x^p}$, ed osservo, che ponendo $\frac{c^p}{x^p} = \frac{z}{b}$, si avrà $bdy = zdx$, ed integrando $by = \int zdx$. Non aggiungo costante, perchè voglio, che $\int zdx = 0$, quando $y = 0$.

Così

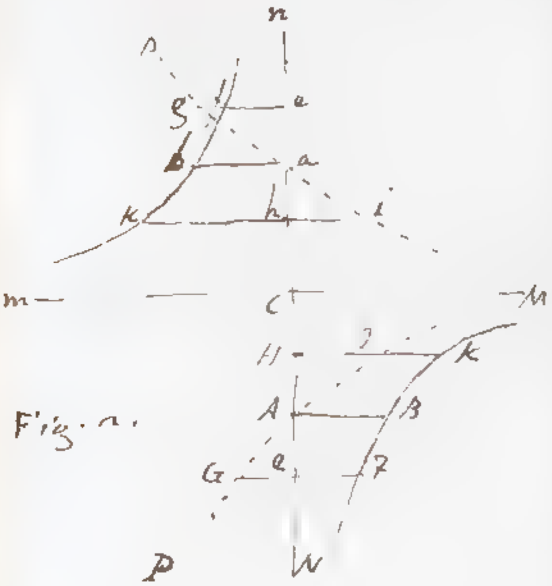


Fig. 2.

Così fatta sommatoria $\int z\,dx$ altro non è, che la quadratura di una curva, che ha l'assissa $= x$, e l'ordinata $= z = \frac{\ell b}{x^p}$. Questa curva è un'iperbola tra gli assintoti, la quale, essendo p dispari come si suppone, ha i suoi rami collocati negli angoli degli assintoti opposti al vertice. Descriviamola. Siano gli assintoti Mm, Nn, che si segano in C ad angoli retti. I due rami dell'iperbola siano MBN, mbn. Sia $CA = Ca = f$, sarà $AB = ab = b.\frac{\ell}{f^p}$. Presa qualunque assissa Ce, e menata l'ordinata ez, che si prolunghi in G, per modo che $b.eG =$ l'aja ABze, i punti G, e gli altri similmente determinati saranno nella curva cercata, la qual essa pure è un'iperbola di un grado inferiore per l'unità, come l'integrazion manifesta. Ma seguiamo la nostra costruzione.

Se l'assissa $= CA = f$, ez caderà sopra AB, e nulla sarà l'aja iperbolica, onde $y = 0$; dunque la curva passerà pel punto A. Crescendo l'assissa Ce, e per conseguenza l'aja ABze, cresceran l'ordinate Ge, onde si avrà la curva AGP, che sempre più si andrà discostando dalla linea delle assisse CN. Questo discostamento però non si farà

oltre

oltre ogni limite; perchè, presa in-
finita l'assissa, l'aja iperbolica
infinitamente lunga, che comincia
da AB, ha un valore finito; onde
la curva avrà un assintoto parallelo
a CN. Torno a collocare l'ordinata
sopra AB, appresso diminuisco l'
assissa, facendola CH, onde l'ordi-
nata passi in HK. L'aja ABKH
essendo situata nella opposta parte
rispetto alla AB, divien negativa;
dunque negativa sarà l'ordinata
HI dalla nostra curva, la quale
sempre, col diminuirsi dell'assissa,
negativamente si aumenterà sino
al punto C, nel qual punto, essendo
l'aja iperbolica infinita, diverrà
essa pure infinita, onde continuerà
la curva in AIM, ed avrà per
assintoto la CM.

Se la retta HK oltrepassi il
punto C, onde l'assissa Ch, e l'
ordinata hk diventino negative,
lo spazio MCAB come dianzi è
negativo, e mChk positivo;
dunque ad aver l'ordinata della
curva cercata, si dovrà prendere
di così fatte aje la differenza:
ma segata CH = Ch, si ha mChk
= MCHK; dunque la differenza
sarà AHKB = ahkb, ch'è ne-
gativa; dunque l'ordinata hi =
HI. Progredisca l'ordinata alla
iperbola sino in ab. Essendo egua-
li gli spazj MCAB, mCab l'un

negativo

saranno

negativo, l'altro positivo, l'ordinata alla curva cercata sarà $= 0$, e la curva passerà pel punto a; la quale avrà la parte aiM simile, ed eguale perfettamente alli AIM. Dassi l'ordinata in af, e si tagli $Ce = Ca$. Se dallo spazio positivo $mCaf = MCeT$ si levi $MCAB$ negativo, rimarrà il positivo $BAeT = baef$; dunque l'ordinata eg della curva, che si descrive, sarà positiva, ed eguale alli eG: quindi nascerà il ramo agp simile ed eguale ad AGP. Adunque la curva sarà composta di due rami simili, ed eguali, per modo che son eguali l'ordinate corrispondenti alli assisse positive, e negative. Il raziocinio è chiaro ed evidente per se medesimo, e l'integrazione, la quale porge la medesima conseguenza, giustissimo lo conferma.

Sebbene nel caso di $p = 1$, dove l'iperbola è l'appoloniana, manca il metodo delle integrazione, pure si può istituire il medesimo raziocinio, e con esso nello stesso modo provare, che la curva descritta, la qual è la logaritmica è di due rami composta simili ed eguali, ne' quali l'assisse, cioè i numeri positivi e negativi hanno la stessa ordinata, cioè lo stesso logaritmo, con questo sol di divario, che i due rami AGP, agp

dalla

dalla linea dell'assissa si discostano all'infinito, perchè infinita e li aja infinitamente lunga dell'iperbola apolloniana. Si avverta, che nella premessa circostanza è data la sottotangente della logistica, che $= c$. Resta dunque geometricamente dimostrato, che dato il protonumero e la sottotangente, la logaritmica ha due rami, e che qualunque numero negativo ha un logaritmo reale uguale al logaritmo del numero positivo. Non veggio qual cosa si possa opporre ad un raziocinio si schietto e palpabile, di cui si è servito il Bernoulli, il Sig.r d'Alembert, ed io nel cap. 6 del lib: p.mo tomo 2. delle Instituzioni:

Io so, che il Sig. Cav. de Foncenex nel primo tomo dell'Accad. di Turino si è studiato con ogni sforzo di persuadere, che i due rami della logistica generati colla quadratura delle aje iperboliche sono divisi così isolati, e non legati insieme e connessi colla legge di continuità, comunque il sieno i rami opposti dell'iperbola. Tuttavia di ciò non farò parola, perchè mosso dalle dotte riflessioni del Sig.r d'Alembert egli nel tomo secondo rigetta quell'opinione, e riconosce la continuità de' due rami, ristringendosi a dire, che una serie geometrica non può estendersi ai numeri negativi, a' quali però i reali logaritmi non possono

convenire.

convenire. Di questa sua ultima
ritirata dovrò parlare nella terza
Lettera. A compimento della pre=
sente sopra le cose dette da questo
ingegnoso Scrittore aggiungerò
due riflessioni, che non sono state
toccate dalli d'Alembert.

Il Sig.r Bernoulli dopo aver
considerata l'aja AAKH, e per
conseguenza ABMC come positiva
riguarda come negativa l'aja mChk
In una nota aggiunta sembra al
Sig.re de Foncenex dover essere co-
tali spazj dotati del medesimo se-
gno; perchè sono negli angoli op-
posti al vertice C. Mi concederà
agevolmente, ch'il prender l'aje,
le quali incominciano dalla ordi-
nata fissa AB, positive piuttosto
dalla una parte, che dalla altra, è
interamente arbitrario: Ma se
AHKB si prendano positive, sicco=
me le prende il Bernoulli; sicu=
ramente vogliono riguardarsi come
negative l'aja mChk. Lo dimostro.
Procedendo H oltre il punto C, se
vi avesse curva nell'angolo nCM,
la sua aja seguiterebbe ad essere
positiva: ma rispetto a questa l'
aja contenuta nell'angolo mCn
è negativa; dunque è pur nega-
tiva rispetto all'aja AHKB, e per
conseguenza rispetto all'ABMC,
che riguardasi come positiva. Il
principio, che l'aje situate negli
angoli opposti al vertice devono

essere

esser dotate del medesimo segno, è vero; ma fuor di luogo applicato. Perciocchè gli angoli devon esser formati da quelle linee, che costituiscono il confine tra il positivo, ed il negativo. Queste nel caso nostro sono la nM, e la AB prodotta dall'una parte, e dall'altra. Or ciò posto le aje ABMC, in Chk sono collocate negli angoli adiacenti, e perciò dotate di segni diversi.

Fa il lodato Sig.^r Cavaliere generare le due iperbole opposte col movimento del raggio CP intorno al punto C; nella qual descrizione egli pretende, che segua un salto nell'angolo ACP. Riduciamo la cosa agli archi de' circoli, descrivendo col raggio eguale al semiasse CA il circolo AqD. Egli è visibile, che collocando CP sovra l'assintoto CM; e facendo muovere CP verso A, l'angolo ACP, e l'arco Aq s'andrà continuamente diminuendo, finchè arrivi ad esser nulla coincidendo CP con CA. Continuando il moto, l'angolo, e l'arco riceve degli accrescimenti negativi, finchè CP viene a coincidere coll'altro assintoto CN, nel qual caso l'angolo è semiretto, e l'arco l'ottava parte della circonferenza. Ma quando la CP sia giunta in CN, il punto P, che trovasi in N, passando immediata-

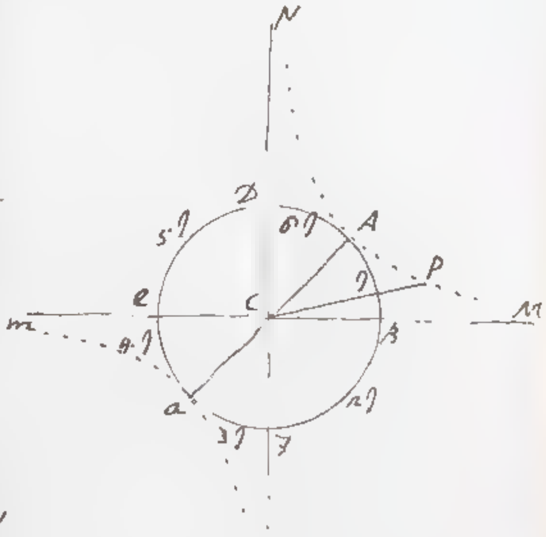


Fig. 3.

mente

menta in n, il raggio CP tutto di un colpo dovrà divenir negativo, e porsi in Cn, e l'angolo negativo verrà accresciuto tutto di un colpo di due angoli retti, e l'arco di una semicirconferenza, ed appresso comincerà la descrizione della iperbola opposta.

Così l'Autore, il quale negli angoli, e negli archi introduce un salto, che non è necessario, anzi è contrario alla natura del movimento. Parliamo sol degli archi, e prendiamoli sempre positivi per maggiore semplicità. Se il raggio CP è posto sopra CA, l'arco AI è nullo. Si muova verso CM, e si descriva il ramo della iperbola AM. L'arco AI si va sempre aumentando, finchè divenga eguale al semiquadrante, cadendo il raggio sopra CM. Seguiti il moto, e si accresca l'arco A2I; il raggio CP diverrà immaginario, e immaginaria sarà l'iperbola, finchè il raggio posi sopra Cn. In appresso seguendo il moto, all'arco A3I maggiore di tre semiquadranti, e minore di quattro, corrisponderà il ramo na della iperbola, che verrà descritto. Di poi, facendosi l'arco A4I maggior della semicirconferenza, e minor di cinque semiquadranti, si descriverà il ramo am. Si accresca l'arco A5I continuando il moto,

e l'iperbola sarà di nuovo immaginaria, finchè il raggio descrivente si posi sopra la CN. Finalmente fatto l'arco AOT maggiore di sette semiquadranti, e minore dell'intera circonferenza, viene ad esser descritto l'ultimo ramo NA. Proseguendo il moto, e prendendosi archi maggiori della circonferenza, i medesimi rami dell'iperbola tornano ad esser descritti. In cotal descrizione dell'iperbola niun salto v'ha negli archi, e negli angoli; perciocchè il passaggio dal reale all'immaginario, e dall'immaginario al reale non toglie la continuità, siccome la geometria con infiniti esempi il dimostra.

Penso di aver a sufficienza dichiarato, che comunque sia malagevole assai colla sola analisi dimostrare, che dato il protonumero, e la sottotangente, la logaritmica è di due rami formata, e che i logaritmi de' numeri negativi sono eguali a quelli de' positivi; pure la geometria toglie ogni dubbietà intorno a così fatta proposizione, la quale vuol aversi per certissima, ed evidente. Di qual forza siano, e fin dove si estendano le ragioni dell'altra parte, sarà il soggetto della terza Lettera. Intanto pregandovi a leggere questa con attenzione, e a significarmi il vostro giudicio, che pregio assai, mi dichiaro.

Bologna li 29 Agosto 1767.

Lettera terza di Vincenzo Riccati al Sig.r Ab. Jacopo Pellizzari Professore di Geometria, e di Fisica nel Seminario di Treviso.

Sig. Ab. Rivmo

Entro senz'indugio, Sig. Ab. Riv.mo, in una più minuta disamina della formola $f\cdot\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{y}{f}} = x$, nella quale per qualunque valor reale si attribuisca al logaritmo y, non può il numero x divenir giammai negativo. Di cotal argomento ho data in corte parole la vera soluzione nella prima lettera. Ora è di uopo considerar ciò, che intorno ad esso dal Sig. d'Alembert è stato pensato; ed illustrare, e dar forza alla mia soluzione con nuove riflessioni. A diminuir il peso della ragione, il Sig. d'Alembert scrive in tal forma. Se posti p, q numeri dispari, sia $\frac{y}{f} = \frac{p}{2q}$, si avrà $f\cdot\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{p}{2q}} = \pm f\sqrt{\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{p}{q}}} = x$; nella quale il numero x ha non solo un valor positivo, ma ancora un negativo. Donde segue, esservi almeno un'infinità di numeri negativi x, a' quali competono i logaritmi reali, che agguagliano i logaritmi de' numeri positivi. Dunque la logaritmica deve avere un'infinità di punti coniugati tanto vicini l'uno all'altro, quanto si voglia. Ora io domando, sieguo egli, se una serie di così fatti punti coniugati non ci presenti una curva continua?

Io son sicuro, che nel vostro animo a cotale interrogazione rispon-
derete

devere di noi. Perciocchè a formar una curva continuata non basta, che ad infiniti punti dell'assissa, comunque vicini quanto si voglia, corrispondano le ordinate reali: fa di mestieri, che assegnato qualunque punto intermedio tra i già notati, sempre vi abbia una ordinata reale. Ma questo non si verifica sicuramente nel caso nostro, perocchè se $\frac{y}{f}$ si ponga eguale o ad un numero intero, o ad una frazione, il cui divisore sia dispari, la formola $\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{y}{f}}$ non sarà fornita se non se di un solo valor reale positivo; dunque il numero non potrà essere negativo, e per conseguenza dalla parte de' numeri negativi non vi avrà curva continuata.

Sembra, che il Sig.r d'Alembert ne convenga, e perciò si appiglia ad un altro partito, che alla vera soluzione più si avvicina. Non conviene, aggiung'egli, riguardar la base logaritmica $= a$ come dotata del solo segno $+$, ma bensì del segno ambiguo $\pm$, perchè la base logaritmica, cioè quel numero, il cui logaritmo agguaglia il protonumero, può prendersi e positiva, e negativa, onde la vera equazion della logaritmica sarà $f\left(\frac{\pm a}{f}\right)^{\frac{y}{f}} = x$. Non può negarsi, che con tal mezzo non si accresca il numero de' punti coniugati dalla parte della assisse negative; perciocchè se $\frac{y}{f}$ sia un numero intero dispari, od una frazione, che abbia dispari il numeratore

numeratore, ed il divisore, il numero si proverrà negativo, ed avrà un logaritmo reale. Ma tutto ciò non basta ad aver la curva continuata; perciocchè se $\frac{y}{f}$ sia un numero intero pari, la x sarà positiva, e perciò l'ordinata non cadrà dalla parte de' numeri negativi, ma da quella de' positivi. Se il Dotto Scrittore avesse inoltrato un passo, ed avesse detto, che la base logaritmica non solamente è una quantità biforme, ma una quantità infinitiforme, siccome io ho detto nella mia prima lettera, avrebbe della difficoltà data una soluzione compita, nè si avrebbe potuto assegnar un numero negativo, che non avesse il suo logaritmo reale.

Ma di mettervi pure sotto degli occhi questa verità più distintamente. Se la base logaritmica $= a$ sia positiva, l'equazione sarà $f\cdot\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{y}{f}} = x$, a cui corrisponde la curva continuata MAP, dove $CA = f$, $Ca = a$. Questa è cosa chiara, nè si revoca in dubbio. <u>Se cangiassi sistema, e facessi tanto il protonumero, quanto la base negativa, onde provenisse l'equazione</u> $-f\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{y}{f}} = x$, <u>nascerebbe</u> la curva continuata Map simile, ed uguale alla MAP, ma posta dall'altra parte dell'assintoto, in cui $Ca = -f$, $Ca = -a$. Ho descritta ancor questa curva, non perchè io supponga entrar essa nel sistema del protonumero $+f$, sopra di che versa

unicamente

Correzione ordinata dal P. Vincenzo dal passo, che principia <u>Se cangiassi sistema</u>.

Se cangiassi sistema, e n'addottassi un altro, in cui il protonumero fosse negativo $= -f$, ed al numero $-a$ corrispondesse il logaritmo $+f$, onde la base logaritmica fosse $= \frac{-f^2}{a}$, e provenisse l'equazione $-f\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{y}{f}} = x$, nascerebbe &c.

saranno

unicamente la questione, ma sol perchè mi gioverà in appresso ad spiegar le cose, che dovrò dire.

Ritornando al protonumero $+f$, e ripigliando l'equazione $f.\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{y}{f}} = x$, osservo, che ad essa appartiene non solamente la curva MAP, ma di più infiniti punti coniugati posti dall'altra parte dell'assintoto, e cadenti sopra la curva Map. Imperciocchè posti p, q numeri dispari, ed n un qualunque numero intero, si faccia $\frac{y}{f} = \frac{\pm p}{2^n q}$: è manifesto, che $\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{\pm p}{2^n q}}$, la qual eguaglia $\sqrt[2^n]{\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{p}{q}}}$, ovvero $\frac{1}{\sqrt[2^n]{\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{p}{q}}}}$, avrà due valori eguali uno positivo, e l'altro negativo, e per conseguenza vi saranno nella curva Map infiniti punti, che soddisfaranno all'equazione proposta. Sebbene tai punti si possano costituir vicini, quanto si voglia, pure non formeranno una curva continua, perchè in mezzo ad essi infiniti punti posso assegnare, che non soddisfanno all'equazione.

Sia ora la base negativa $= -a$, onde risulti l'equazione $f\left(\frac{-a}{f}\right)^{\frac{y}{f}} = x$. Questa assolutamente non è ad una curva, ma ad una congerie di punti coniugati, alcuni de' quali son posti dalla parte delle x positive, alcuni dalla negative. Imperocchè, ritenute le antecedenti denominazioni,

supponghasi $\frac{y}{f} = \pm \frac{2^n p}{q}$; la quantità $\left(-\frac{e}{f}\right)^{\frac{y}{f}}$ sarà sempre positiva, ed infiniti punti caderanno sopra la MAP dalla parte delle x positive. Ma si facia: si $\frac{y}{f} = \frac{\pm p}{2^n q}$ o sia n pari, o sia dis: pari, la quantità $\left(-\frac{e}{f}\right)^{\frac{y}{f}}$ sarà imma: ginaria, e per consequenza immagi: narj i punti, che alle equazion sod: disfanno. Finalmente se $\frac{y}{f} = \frac{\pm p}{q}$, la quantità $\left(-\frac{e}{f}\right)^{\frac{y}{f}}$ è sempre negativa, ed i punti cadono sopra Map dalla banda delle assisse negative. Con: giungendo tutti i punti, che nella supposizion della base positiva, e nella supposizion della negativa cadono sopra la curva Map dalla parte delle assisse negative, essi si avranno qualunque volta sia o $\frac{y}{f} = \frac{\pm p}{2^n q}$, o $\frac{y}{f} = \frac{\pm p}{q}$, nella prima delle quali formole n è un qua: lunque numero.

Se si riguardi come base loga: ritmica $e\sqrt{-1}$, la quantità $\left(\frac{e\sqrt{-1}}{f}\right)^{\frac{y}{f}}$ sarà sempre immaginaria, quando non sia $\frac{y}{f} = \pm \frac{2^n p}{q}$. Se sia $n = 1$, sarà negativa; ma se $n > 1$, sarà positi: va. Dunque la presente supposi: zione accrescerà il numero de' punti coniugati cadenti dalla banda delle x negative sopra Map, i quai si avranno, quando si ponga $\frac{y}{f} = \frac{\pm 2p}{q}$.

Progredendo si supponga la

base

basa logaritmica $= a\sqrt[4]{-1}$, posso dimostrarvi, che posto $\frac{y}{f} = \pm\frac{2^n p}{q}$, se $n=1$, la quantità $\left(\frac{a\sqrt[4]{-1}}{f}\right)^{\frac{y}{f}}$ è immaginaria; se $n=2$, è negativa, ed i punti conjugati caderanno sopra Map; ma se $n>2$, i punti conjugati caderanno sopra MAP, essendo $\left(\frac{a\sqrt[4]{-1}}{f}\right)^{\frac{y}{f}}$ positiva. Le ipotesi pertanto accrescera il numero de' punti cadenti dalla parte delle assissa negative, estendendoli a tutti i casi, ove $\frac{y}{f} = \pm\frac{4p}{q}$. Si accresceranno ancora per li casi, ove $\frac{y}{f}$ sia eguale

$\pm\frac{8p}{q}$, $\pm\frac{16p}{q}$, $\pm\frac{32p}{q}$ &c.

se la base logaritmica sia

$a\sqrt[8]{-1}$, $a\sqrt[16]{-1}$, $a\sqrt[32]{-1}$ &c. Quindi supponendo n qualunque numero, tutte le ipotesi delle basi logaritmiche a, $-a$; $a\sqrt{-1}$, $a\sqrt[4]{-1}$; $a\sqrt[8]{-1}$ &c. danno i punti dalla banda della x negativa posti sopra la Map, quando $\frac{y}{f}$ sia eguale

$\pm\frac{p}{2^n q}$; $\pm\frac{p}{q}$, $\pm\frac{2p}{q}$, $\pm\frac{4p}{q}$, $\pm\frac{8p}{q}$ &c,

cioè tutti i casi, ove $\frac{y}{f}$ aguaglia una delle tre formule

$\pm\frac{p}{2^n q}$, $\pm\frac{p}{q}$, $\pm\frac{2^n p}{q}$; le quali espressioni abbracciano tutti i possibili numeri razionali.

Egli è manifesto, che tutte le antecedenti aquazioni, le quali così generalmente si esprimono

f

$f\left(\frac{e\sqrt[m]{-1}}{f}\right)^{\frac{y}{f}} = x$, hanno la condizione, che la $e\sqrt[m]{-1}$ sia base logaritmica nel sistema del protonumero $= f$. Imperciocchè se facciasi $y = 0$, sarà $\left(\frac{e\sqrt[m]{-1}}{f}\right)^{0} = 1$, perchè qualunque quantità alzata alla podestà di zero, o una divisa per se medesima eguaglia l'unità; dunque $f = x$, che indica esser il protonumero $= f$. Se facciasi $y = f$, sarà $f \cdot \frac{e\sqrt[m]{-1}}{f} = x$, ossia $e\sqrt[m]{-1} = x$; dunque il numero, che ha il protonumero $= f$ si è $= e\sqrt[m]{-1}$, il quale sarà la base logaritmica. Cadendo poi tutti i punti da me determinati sopra la curva Map. dotata della sottotangente $= c$, non può dubitarsi, che essi non appartengano ad un sistema logaritmico fornito della sottotangente $= c$. Quindi nel passaggio, che si fa dalla sottotangente alla base logaritmica, quando si dica sia e la base logaritmica, questa può avere gli infiniti valori contenuti nella formola $e\sqrt[m]{-1}$, qualunque sia il numero m, e per conseguenza è una quantità infinitiforme. Se poi tal si considera, egli è evidente, che tutti i numeri razionali negativi hanno un logaritmo reale tal quale li hanno i numeri positivi, come si è dimostrativamente provato."

Io non ignoro, che a dimostrar la curva continua dalla parte della x negativa, sarebbe di uopo assegnar

alla

saranno

alla base logaritmica un tal valore reale, od immaginario, onde la quantità $\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{x}{f}}$, posto x qualunque numero sordo ed irrazionale, provenisse negativa. Una tal formola la credo difficile, e forse impossibile: onde a far vedere, che la base logaritmica può avere un così fatto valore, mi servirò di un metodo indiretto, che non sarà meno dimostrativo. Avendo dimostrato nella lettera seconda colla quadratura della iperbola apolloniana, che la logaritmica dalla parte della assissa negativa è una curva continuata, che conserva la stessa sottotangente, egli è manifesto, che a qualunque ordinata y corrisponda un' assissa reale x; dunque se la $\frac{x}{f}$ sia un numero sordo, fa di mestieri, che la base a abbia un tal valore, onde $\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{x}{f}}$ riesca reale, e negativa. Niuno faccia la maraviglia di tale argomento: perchè sebbene la a sia reale, e positiva, non sappiamo determinar la quantità $f.\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{x}{f}}$, se $\frac{x}{f}$ sia un numero irrazionale, se non perciò; chi essa nella logaritmica, la qual colla quadratura dell' iperbola è noto essere una curva continua, eguaglia l' assissa, la cui ordinata parallela all' assintoto sta alla f, come un numero irrazionale all' unità.

Dopo queste verissime riflessioni

cade

cade a terra una farragine di obbiezioni, che sono state rilevate sino dal Leibnizio. La prima si è, che se i numeri negativi fossero dotati di logaritmo reale; ne seguirebbe, chi anche i numeri immaginarj sarebbero forniti di un logaritmo reale. Rechisi l'esempio. Se il numero $-nf$ avesse il logaritmo $= g$, ne seguirebbe, che $f\sqrt{-n}$ avrebbe il logaritmo $= \frac{1}{2}g$: perciocchè $f\sqrt{-n}$ è medio proporzionale tra il protonumero f, e $-nf$; ma il medio proporzionale tra il protonumero, e qualsivoglia altro numero ha il logaritmo, che agguaglia la metà del logaritmo del medesimo numero; dunque $l.f\sqrt{-n} = \frac{1}{2}g$; la qual conseguenza sembrasi per assurda visibilmente. Questa obbiezione ha più del dovere spaventato il Sig.r Giovanni Bernoulli, il quale si è ristretto a dire, che $\frac{1}{2}g$ vien ad esser logaritmo di $f\sqrt{n}$, non di $f\sqrt{-n}$; perchè parlandosi de' numeri negativi, si dee prendere il primo termine della proporzione, cioè il protonumero negativo $= -f$, ed $f\sqrt{-n}$ non è media proporzionale tra $-f$, $-nf$, ma solo $f\sqrt{n}$. Questa risposta rovescia affatto l'ipotesi: perciocchè la quistione versa, se posto il protonumero $+f$, il sistema esigga, che i numeri negativi abbiano un logaritmo reale: parte dunque dalla supposizione, chiunque introduce un nuovo sistema, in cui il protonumero sia $-f$: ma

tra

saranno

ra f, e $2f$ la media proporzionale è $f\sqrt{-2}$; dunque se $-2f$ ha il real logaritmo g nel sistema del proto-numero $+f$, nello stesso sistema $f\sqrt{-2}$ avrà il real logaritmo $\frac{1}{2}g$. La conseguenza è evidente. Ma qual assurdo; e qual meraviglia, che i numeri immaginarj sien dotati di logaritmi reali? Non parliam noi di una curva trascendente, in cui alle assisse reali corrispondono infinite ordinate una reale e le altre immaginarie, e similmente alle ordinate reali infinite assisse una reale, e le altre immaginarie? Dunque è conseguenza certissima, che molte anzi infinite assisse immaginarie son dotate d'un logaritmo reale.

Più forza sembra aver la ragione, dentro cui alla perfine ritirasi non meno il Leibnitz, che il Foncenex. Poste due serie una geometrica, l'altra aritmetica

&c. $\frac{1}{8}f$, $\frac{1}{4}f$, $\frac{1}{2}f$, f, $2f$, $4f$, $8f$ &c.

&c. $-3f$, $-2f$, $-f$, 0, f, $2f$, $3f$ &c.

logaritmo di ciascun de' termini della prima serie, che si chiama de' numeri, si è il termine corrispondente della seconda serie aritmetica: come per esempio della f il logaritmo $= 0$; della $2f$ il logaritmo $= f$, della $4f$ il logaritmo $3f$, e così via via. Se la serie geometrica si prosegua dalla parte sinistra, proverranno i numeri minori della f, i cui logaritmi riescono negativi. Ma per quanto si continui la serie geometrica, egli è impossibile,

che

che si presentino termini negativi; dunque i numeri negativi non possono avere logaritmi reali, ma tutti devono essere immaginarj. Se sussista cotal argomento, essi sono interamente paghi, nè per ora punto a concedere tutto il resto al Bernoulli, ed all'Alembert. Io non m'opporrò in questo ai dottissimi Sig.ri Leibnitz, e Toncanex, e accorderò, che il sistema de' logaritmi contenuto nella sua serie non si estenda a' numeri negativi, e che perciò tutti i numeri negativi non abbiano un logaritmo reale. Così il numero medio proporzionale tra f, e $2f$ ha il logaritmo [illegible] ma il numero medio proporzionale $\pm f\sqrt{2}$, ed è tanto positivo, quanto negativo; dunque prendendosi negativo [illegible]. La stessa dicasi di infiniti altri. Ma se la base sia infinitiforme, ed abbia i valori $2f$, $-2f$, $2f\sqrt{-1}$, $2f\sqrt{-1}$, e tutti gli altri, che le convengono, quando per mezzo della sottotangente ritrovansi, a ciascun numero negativo corrisponderà un logaritmo reale. Se il protonumero non avesse luogo nella serie aritmetica, come se fosse

&c. $-3g$, $-2g$, $-g$, 0, g, $2g$, $3g$ &c.,

le stesse cose dire si dovrebbero; perciocchè vagliono le stesse dimostrazioni, quando il logaritmo di qualunque dato numero per esempio $2f$ abbia al protonumero f una data ragione, la quale nell'esempio addotto è $g:f$; come per voi medesimo raccoglievate con somma facilità. Ciò

sia

saranno

via più si rischiarerà, quando esamineremo i pensieri veramente ingegnosi de' Sig.ri Euler, Foncenex, de la Grange, i quali esigono altre lettere, che alle tre prime verranno dietro. Intanto avendo voi sotto degli occhi in pieno lume la mia soluzione della controversia, giudicate se abbia colpito nel segno. Io me ne lusingo; pure al vostro giudizio mi sottometto. In fine professando di aver per voi una somma stima, mi dichiaro qual sono

Bologna li 26 Settembre 1767.

Lettera quarta di Vincenzo Riccati al Sig.r Ab. Jacopo Pellizzari Professore di Geometria, e di Fisica nel Seminario di Treviso

Sig.r Ab. Riv.mo

Tempo è omai, Sig.r Ab. Riv.mo, di ponderare quelle ragioni più recondite, che sono estratte dal cupo seno della più sublime geometria. Mi tratterrò in questa lettera co' Sig.ri Euler, e Foncenex. Comincierò dal metodo elegante senza dubbio e ingegnoso, onde il Cav. Daviet de Foncenex passa dalla equazione differenziale alla esponenziale col mezzo della ordinaria integrazione. Sia la equazione della logistica $dy = \frac{c\,dx}{x}$. Seguendo la nota regola di integrare si ha $y = \frac{cx^0}{0} + A$. Per determinar la costante A si osservi, che supposta $y = 0$, deve esser $x = f$; dunque $0 = \frac{cf^0}{0} + A$; o sia

A

$A = \frac{cf^o}{o}$; la vera formola integrata sarà $y = \frac{c\cdot\overline{x^o - f^o}}{o}$; ovvero $\frac{oy}{c} = x^o - f^o$, o sia $f^o + \frac{oy}{c} = x^o$. Si estragga la radice o, e si avrà $\overline{f^o + \frac{oy}{c}}^{\frac{1}{o}} = x$. Si alzi l'equazione alla potestà $\frac{f}{y}$, onde sia $\overline{f^o + \frac{oy}{c}}^{\frac{f}{oy}} = x^{\frac{f}{y}}$. Arrivato a questa equazione egli si serve della formola newtoniana, e svolge il binomio nella seguente maniera $f^{\frac{of}{oy}} + \frac{f}{oy}\cdot f^{o\cdot\overline{\frac{f}{oy}-1}}\cdot\frac{oy}{c}$

$+ \frac{f}{2\cdot oy}\cdot\overline{\frac{f}{oy}-1}\cdot f^{o\cdot\overline{\frac{f}{oy}-2}}\cdot\left(\frac{oy}{c}\right)^2$

$+ \frac{f}{2\cdot3\cdot oy}\cdot\overline{\frac{f}{oy}-1}\cdot\overline{\frac{f}{oy}-2}\cdot f^{o\cdot\overline{\frac{f}{oy}-3}}\cdot\left(\frac{oy}{c}\right)^3$ &c.

$= x^{\frac{f}{y}}$, la qual ridotta, ommettendo que' termini, che rispettivamente son nulli, sarà

$f^{\frac{f}{y}} + \frac{f^{\frac{f}{y}+1}}{c} + \frac{f^{\frac{f}{y}+2}}{2c^2} + \frac{f^{\frac{f}{y}+3}}{2.3.c^3}$ &c. $= x^{\frac{f}{y}}$,

o sia $f^{\frac{f}{y}}\cdot\overline{1+\frac{f}{c}+\frac{f^2}{2c^2}+\frac{f^3}{2.3.c^3}}$ &c. $= x^{\frac{f}{y}}$.

Si ponga ora $1+\frac{f}{c}+\frac{f^2}{2c^2}+\frac{f^3}{2.3.c^3}$ &c.

$= \frac{a}{f}$, e sarà $\frac{a}{f}\cdot f^{\frac{f}{y}} = x^{\frac{f}{y}}$, ovvero $f\cdot\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{y}{f}} = x$, come si dovea ritrovare.

Non muoverò lite al Sig.r de Fontenex per ciò, ch'il teorema newtoniano, di che si serve, non può negli esponenti sordi, e molto più negli esponenti variabili dimostrarsi con altro mezzo, se non con quello della teoria de' logaritmi. Avrei rincrescimento, che patisse eccezione un raziocinio lavorato con somma acutezza, e che conduca alla verità. Ma non vorrei, ch'

che il dotto Scrittore si inoltrasse a ra=
ziocinare così. Ricavandosi dalle equa=
zione differenziale l'esponenziale
con discorso stretto, e geometrico, deve
necessariamente concedersi; che amen
due hanno la stessa estensione; ma
l'esponenziale non si estende alle
assisse negative; dunque nè pur la
differenziale. Imperciocchè quando
si comanda di svolgere il binomio
trovato in una serie col notissimo
teorema del Newton, si fa una ta=
cita restrizione, per cui tutte le e=
quazioni seguenti sono meno ampie,
ed estese di quelle, da cui derivano.
Il binomio è il seguente $\overline{f^{o} + \frac{oy}{c}}^{\frac{f}{oy}}$.
La serie, che si ritrova col canone
del Newton, porge un sol valore del
binomio, e questo reale, ed affermati=
tivo. Ma è egli questo l'unico suo
valore? Egli ne ha infiniti senz'
alcun dubbio. E per restarne per=
suaso, basta riflettere, che tutti i
numeri possibili sono fattori di zero.
Suppongasi, che il nulla abbia per
fattore il 2: due sono i suoi valori
amendue reali l'uno positivo l'altro
negativo; onde ritenuto il medesimo
valor della e, si perverrà alle equa=
zione $\frac{\pm e}{f} \cdot f^{\frac{f}{y}} = x^{\frac{f}{y}}$. Se il nulla
abbia per fattore 4, si aggiungerà
a' precedenti lo stesso valore molti=
plicato per $\sqrt{-1}$, onde si avrà
$\frac{e\sqrt{-1}}{f} \cdot f^{\frac{f}{y}} = x^{\frac{f}{y}}$, e generalmente
sia il fattore di nulla sia $2m$, otter=

veni

ram la equazione $\frac{a\sqrt[m]{-1}\cdot f^{\frac{f}{y}}}{f} = x^{\frac{f}{y}}$, posti i quali infiniti valori s'è provato nella terza lettera, aver tutti i numeri negativi un logaritmo reale.

Passo al raziocinio del Sig.r Autore, che dà a divedere la industria, e lo ingegno profondissimo dello Autore. Si sa, che posto ω infinitamente piccolo, $l\overline{f+\omega} = \frac{f\omega}{c}$; dunque $l\frac{\overline{f+\omega}^{\,n}}{f^{n-1}} = \frac{nf\omega}{c}$ qualunque sia il numero n anche infinito, come supporremo in appresso. Posta la equazione $lx = y$, si avrà $\frac{\overline{f+\omega}^{\,n}}{f^{n-1}} = x$, $\frac{nf\omega}{c} = y$: quindi

$\omega = f^{\frac{n-1}{n}}x^{\frac{1}{n}} - f$, $\omega = \frac{cy}{nf}$; dunque

$\frac{cy}{nf} = f^{\frac{n-1}{n}}x^{\frac{1}{n}} - f$, o sia $\frac{y}{n} = \frac{f^{\frac{2n-1}{n}}x^{\frac{1}{n}}}{c}$

$-\frac{ff}{c}$; dunque $\overline{\frac{ff}{c}+\frac{y}{n}}^{\,n} - \frac{f^{2n-1}x}{c^n} = 0$.

Per ritrovar i logaritmi tutti tanto de' numeri positivi, quanto de' negativi, abbraccia il seguente metodo. Poiché il numero x ha sicuramente un logaritmo reale, sia esso $= X$. Il numero $+x = f\cdot\frac{x}{f}$; dunque $lx = lf + lx =$ $lf + X$; dunque si ritroveranno tutti i logaritmi di $+x$, quando si ritrovino tutti i logaritmi di f. Similmente $-x = -f\cdot\frac{x}{f}$; dunque $l{-x} = l{-f} + lx$ $= l{-f} + X$. Si otterranno pertanto tutti i logaritmi di $-x$, quando ritrovinsi tutti i logaritmi di $-f$.

Ciò premesso, pongo $x = f$, e la equazione trovata diviene

$\overline{\frac{f^2}{c}+\frac{y}{n}}^{\,n} - \frac{f^{2n}}{c^n} = 0$. Appresso sia

x

Nota

è qui corso uno sbaglio, che influisca nel restante del calcolo. Doveva scriversi $l\overline{f+\omega} = \frac{c\omega}{f}$

$x = \pm f$, e riducendosi ... in $\overline{\frac{f^2}{c} + \frac{y}{n}}^{\,n} + \frac{f^{2n}}{c^n} = 0$. Vogliamsi risolvere questi due binomj reali col metodo, che è contenuto nel cap. 5. lib. 3. tom. p^{mo} delle Instituzioni. Per brevità farò il calcolo nella supposizione di n dispari, lasciando a Voi di ricavare la stessa conseguenza nella supposizion di n pari; e per facilità pongo $\frac{f^2}{c} + \frac{y}{n} = z$, $\frac{f^2}{c} = v$, che prendo per seno totale. I due binomj da risolversi saranno $z^n - v^n = 0$, $z^n + v^n = 0$. Chiamando π la intera circonferenza sarà

$$z^n - v^n = \overline{z - v} \cdot \overline{z^2 - 2z\,Cc.\frac{\pi}{n} + v^2} \cdot \overline{z^2 - 2z\,Cc.\frac{2\pi}{n} + v^2}\ \&c.$$

$= 0$. Il secondo binomio proviene

$$z^n + v^n = \overline{z + v} \cdot \overline{z^2 - 2z\,Cc.\frac{\pi}{2n} + v^2} \cdot \overline{z^2 - 2z\,Cc.\frac{3\pi}{2n} + v^2}\ \&c.$$

$= 0$. Nel primo i coefficienti di π crescono secondo la progressione de' numeri naturali, nel secondo de' numeri dispari, e nell'uno, e nell'altro il numero de' trinomj è $= \frac{n-1}{2}$.

Se λ esprime un qualunque numero intero incominciando dall'unità, e finendo nel numero $\frac{n-1}{2}$ inclusivamente sarà

$$z^n - v^n = \overline{z - v} \cdot \overline{z^2 - 2z\,Cc.\frac{\lambda\pi}{n} + v^2} = 0$$

$$z^n + v^n = \overline{z + v} \cdot \overline{z^2 - 2z\,Cc.\frac{\overline{2\lambda - 1}\,.\,\pi}{2n} + v^2} = 0$$

Questi due trinomj si risolvono in due binomj immaginarj, cioè $z^2 - 2z\,Cc.\frac{\lambda\pi}{n} + v^2$

$$= \overline{z - Cc.\frac{\lambda\pi}{n} + \sqrt{-1}\,.\,Sc.\frac{\lambda\pi}{n}} \cdot \overline{z - Cc.\frac{\lambda\pi}{n} - \sqrt{-1}\,Sc.\frac{\lambda\pi}{n}}$$

$z^2 - 2z\,Cc.\frac{\overline{2\lambda - 1}\,.\,\pi}{2n} + v^2 =$

$$\overline{z - Cc.\frac{\overline{2\lambda-1}\,.\,\pi}{2n} + \sqrt{-1}\,.\,Sc.\frac{\overline{2\lambda-1}\,.\,\pi}{2n}} \cdot \overline{z - Cc.\frac{\overline{2\lambda-1}\,.\,\pi}{2n} - \sqrt{-1}\,Sc.\frac{\overline{2\lambda-1}\,.\,\pi}{2n}}$$

i quali

i quali per mezzo del segno ambiguo si riducono ad uno. Adunque

$$z^n - v^n = \overline{z - v} \cdot \overline{z - Cc.\frac{\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\cdot Sc.\frac{\lambda\pi}{n}}$$

$$z^n + v^n = \overline{z + v} \cdot \overline{z - Cc.\frac{2\lambda - 1}{2n}\cdot\pi \pm \sqrt{-1}\, Sc.\frac{2\lambda - 1}{2n}\cdot\pi}$$

Si avranno pertanto e nello un caso, e nello altro tutti i valori della z, se ciascun di fattori si ponga $= 0$.

Incominciamo dal primo binomio. Sia il primo fattore $z - v = 0$, o sia $\frac{f^2}{c} + \frac{y}{n} - \frac{f^2}{c} = 0$; dunque $y = 0$, ch'è il primo valore del logaritmo $+f$. Gli altri fattori daranno $\frac{f^2}{c} + \frac{y}{n} - Cc.\frac{\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\, Sc.\frac{\lambda\pi}{n} = 0$. Essendo n infinito, sarà $\frac{\lambda\pi}{n}$ infinitamente picciolo; dunque $Cc.\frac{\lambda\pi}{n} = \frac{f^2}{c}$, $Sc.\frac{\lambda\pi}{n} = \frac{\lambda\pi}{n}$; dunque $\frac{f^2}{c} + \frac{y}{n} - \frac{f^2}{c} \pm \sqrt{-1}\cdot\frac{\lambda\pi}{n} = 0$; o sia $y = \mp\sqrt{-1}\cdot\lambda\pi$, la qual contiene tutti gli altri valori immaginarj della y, o sia del logaritmo della $+f$. Esponendoli dunque in una serie, si avranno i $l+f$ così 0, $\mp\sqrt{-1}\cdot\pi$, $\mp\sqrt{-1}\cdot 2\pi$, $\mp\sqrt{-1}\cdot 3\pi$ &c.

Passando al secondo binomio, sia $z + v = 0$, ovvero $\frac{f^2}{c} + \frac{y}{n} + \frac{f^2}{c} = 0$ ovvero $y = \frac{2nf^2}{c}$, ch'indica aver il $l-f$ un valor infinito negativo, che porterebbe la curva infinitamente lontana. Lasciando star questo; gli altri daranno $\frac{f^2}{c} + \frac{y}{n} - Cc.\frac{2\lambda - 1}{2n}\cdot\pi \pm \sqrt{-1}\cdot Sc.\frac{2\lambda - 1}{2n}\cdot\pi = 0$.

Adunque per la ragione poc'anzi toccata sarà $\frac{f^2}{c} + \frac{y}{n} - \frac{f^2}{c} \pm \sqrt{-1}\cdot\frac{2\lambda - 1}{2n}\cdot\pi = 0$, ovvero $y = \mp\sqrt{-1}\cdot\overline{2\lambda - 1}\cdot\pi$. Tutti pertanto i valori di $l-f$ ridotti in serie

saranno

35. 6

35. 6

saranno $\mp\sqrt{-1}\cdot\frac{\pi}{2}$, $\mp\sqrt{-1}\cdot\frac{3\pi}{2}$, $\mp\sqrt{-1}\cdot\frac{5\pi}{2}$ &c. Qui è dove si fa forte il Sig.r Eulero. Niuno de' valori di $l-f$ è $=0$, niuno è reale, ma tutti sono immaginarj; dunque i logaritmi de' numeri negativi, che $=l-f+X$ non possono esser eguali ai logaritmi de' numeri positivi, e tutti sono immaginarj. S'avverta, che i valori immaginarj di $l+f$ sono diversi da quelli di $l-f$.

L'incomparabile Sig.r d'Alembert, per levare ogni forza a questo sottil raziocinio dell'Eulero, asserisce che nell'equazione $\frac{f^2}{c}+\frac{y}{n}-Cc.\frac{2\lambda-1}{2n}\cdot\pi$ $\pm\sqrt{-1}\,Sc.\frac{2\lambda-1}{2n}\cdot\pi=0$, la y può essere $=0$; perchè se pongasi $\lambda=n$, che è infinito, si avrà $\frac{f^2}{c}+\frac{y}{n}-Cc.\pi\pm\sqrt{-1}\,Sc.\pi=0$: ma essendo π la intera circonferenza, $Cc.\pi=\frac{f^2}{c}$, e $Sc.\pi=0$; dunque $\frac{y}{n}=0$, da cui ricavasi $y=0$. Quantunque io convenga, che nell'esposta equazione non sia sempre permesso di riguardar λ come finito, crescendo esso all'infinito per guisa, che ha alla n una ragion data; pure due forti ragioni mi costringono a non valermi di tal risposta.

Ecco la prima. Posto $\lambda=n$, l'arco non proviene $=\pi$, ma sibbene $=\pi-\frac{1}{2n}\pi$. Il suo coseno a dir vero si può porre $=\frac{f^2}{c}$, perchè da questa quantità non differisca se non pel seno verso, il quale è minimo rispetto al seno, ed all'arco $\frac{1}{2n}\pi$: ma non può porsi $Sc.\,\overline{\pi-\frac{1}{2n}\pi}=0$.

Imperciocchè

Lettera
Dal Co. Giordano Riccati al

Imperciocchè il seno dalla intera circonferenza detratto un minimo arco è uguale al seno di questo minimo arco preso negativamente, cioè $Sc.-\frac{1}{2n}\pi = -\frac{1}{2n}\pi$; dunque l'equazion proverrà $\frac{y}{n} \mp \sqrt{-1}.\frac{1}{2n}\pi = 0$, o sia $y = \pm\sqrt{-1}.\frac{1}{2}\pi$; dunque essendo $\frac{\pi}{2}$ quantità finita, cioè la metà della circonferenza, la y non è $= 0$, ma una quantità immaginaria. Nè si dica, che può supporsi $2\lambda - 1 = 2n$, perchè verrebbe ad esser $\lambda = \frac{2n-1}{2}$ numero fratto contro alla natura del calcolo.

La seconda ragion si è, perchè non è lecito di porre $\lambda = n$. Ho notato di sopra, che il numero de' trinomj, e per conseguenza de' binomj da lor nascenti è $\frac{n-v}{2}$, al qual numero può ascendere e non più il valore di λ: dunque il massimo valore sarà $\lambda = \frac{n-1}{2}$, di onde $2\lambda - 1 = n-2$. Fatta la sostituzione proverrà l'arco $= \frac{n-2}{2n}.\pi$ $= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$. essendo $\frac{\pi}{2}$ la metà della circonferenza, il coseno non sarà $= \frac{f^2}{c}$, ma bensì $= -\frac{f^2}{c}$, onde l'equazion proverrà $\frac{2f^2}{c} + \frac{y}{n} \pm \sqrt{-1}\ Sc.\overline{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}} = 0$, la quale non può dare $y = 0$, ma $= -\frac{2nf^2}{c} \pm \sqrt{-1}.\frac{\pi}{n}$.

Migliore è l'altra risposta, che il Sig.r Alembert accenna con tai parole. Le prove del Sig.r Euler sono fondate sopra ciò, che $l\,\overline{f+\omega}^{\,n} = \frac{n f\omega}{c}$ rappresenta secondo lui tutti i logaritmi, supposizione, che mi sembra poter essere contraddetta

contraddetta: imperciocchè ω essendo infinitamente picciolo, ed n infinitamente grande; com'egli suppone, la $\overline{f\pm\omega}^{\,n}$ non saprebbe rappresentare se non de' numeri positivi. In così fatte parole si appiatta la vera risposta dell'obbiezione, ma ha bisogno di essere collocata in più vivo lume.

Io rifletto, che $\frac{f\omega}{c}$ è il logaritmo non solo del numero $f+\omega$, ma ancor del numero $-f-\omega$: dunque si avrà $l\frac{(-f-\omega)^n}{f^{n-1}} = \frac{nf\omega}{c}$. Quindi se abbiasi l'equazione $lx = y$, posto $\frac{(-f-\omega)^n}{f^{n-1}} = x$, $\frac{nf\omega}{c} = y$, nasceranno le due equazioni $-f^{\frac{n-1}{n}}x^{\frac{1}{n}} - f = \omega$, $\frac{cy}{nf} = \omega$; dunque $\frac{cy}{nf} = -f^{\frac{n-1}{n}}x^{\frac{1}{n}} - f$, o sia $\frac{y}{n} = -\frac{f^{\frac{2n-1}{n}}x^{\frac{1}{n}}}{c} - \frac{f^2}{c}$; donde si ottiene

$\frac{f^{2n-1}x}{c^n} = \left(-\frac{f^2}{c}-\frac{y}{n}\right)^n$. Se n sia numero dispari, siccome or supponiamo, avremo $\frac{f^{2n-1}x}{c^n} = -\left(\frac{f^2}{c}+\frac{y}{n}\right)^n$; dunque $\overline{\frac{f^2}{c}+\frac{y}{n}}^{\,n} + \frac{f^{2n-1}x}{c^n} = 0$. Adunque se si fa $x=+f$, si avrà $\overline{\frac{f^2}{c}+\frac{y}{n}}^{\,n} + \frac{f^{2n}}{c^n} = 0$; e se si fa $x=-f$, nascerà $\overline{\frac{f^2}{c}+\frac{y}{n}}^{\,n} - \frac{f^{2n}}{c^n} = 0$. Quindi chiaramente deducesi, che tutti i logaritmi di $+f$, i quali si son trovati nella prima supposizione, convengono anche a $-f$, come la seconda supposizione dimostra: dunque si ritrova anche $l-f = 0$, e per conseguenza i logaritmi de' numeri

negativi

Lettera
del Co. Giordano Riccati al

negativi si ritrovano uguali ai logaritmi de' numeri positivi.

Dirata, che questa ragione è ristretta al caso di n dispari. La estenderò a poco à poco anche ai numeri pari. Ed in prima parlerò de' numeri, che sono divisibili per 2, e non per 4, i quali esprimerò per 2n, posto n dispari. Osservo, che $\frac{l\omega}{c}$ è logaritmo ancora di $f+\omega\sqrt{-1}$; dunque avremo $l\left(\frac{f\sqrt{-1}+\omega\sqrt{-1}}{f^{2n-1}}\right)^{2n} = \frac{2nl\omega}{c}$. Quindi posto siccome dianzi $\left(\frac{f\sqrt{-1}+\omega\sqrt{-1}}{f^{2n-1}}\right)^{2n} = x$, $\frac{2nl\omega}{c} = y$, ritroveremo i due valori di ω, come seguono $\omega = \frac{f^{\frac{2n-1}{2n}}x^{\frac{1}{2n}}}{\sqrt{-1}} - f$, $\omega = \frac{cy}{2nf}$; dunque $\frac{cy}{2nf} = \frac{f^{\frac{2n-1}{2n}}x^{\frac{1}{2n}}}{\sqrt{-1}} - f$, o sia $\frac{y}{2n} = \frac{f^{\frac{4n-1}{2n}}x^{\frac{1}{2n}}}{c\sqrt{-1}} - \frac{f^2}{c}$, dalla quale proviene $\frac{f^2\sqrt{-1}}{c} + \frac{y\sqrt{-1}}{2n} = f^{\frac{4n-1}{2n}}x^{\frac{1}{2n}}$, ovvero $\left(\frac{f^2\sqrt{-1}}{c} + \frac{y\sqrt{-1}}{2n}\right)^{2n} - \frac{f^{4n-1}x}{c^{2n}} = 0$.

Alzato alla seconda podestà il binomio, che ha l'esponente 2n, nasce $\left(-\frac{f^4}{c^2} - \frac{2f^2y}{2nc} - \frac{y^2}{4n^2}\right)^n - \frac{f^{4n-1}x}{c^{2n}} = 0$. Essendo n numero dispari, l'equazione trovata equivale alla seguente $-\left(\frac{f^4}{c^2} + \frac{2f^2y}{2nc} + \frac{y^2}{4n^2}\right)^n - \frac{f^{4n-1}x}{c^{2n}} = 0$, ovvero $-\left(\frac{f^2}{c} + \frac{y}{2n}\right)^{2n} - \frac{f^{4n-1}x}{c^{2n}} = 0$; dunque

$\left(\frac{f^2}{c} + \frac{y}{2n}\right)^{2n} + \frac{f^{4n-1}x}{c^{2n}} = 0$. Pertanto se $x = +f$, sarà $\left(\frac{f^2}{c} + \frac{y}{2n}\right)^{2n} + \frac{f^{4n}}{c^{2n}} = 0$;

35 6

36 2

e posta $x=-f$, si avrà

$$\overline{\frac{f^2}{c}+\frac{y}{2n}}^{\,2n}-\frac{f^{4n}}{c^{2n}}=0.$$ Le due equazioni,

fatto $l\overline{f+\omega}=\frac{f\omega}{c}$ si sarebbero trovate con ordine inverso; cioè la prima si sarebbe trovata, posto $x=-f$, e la seconda posto $x=+f$. Dunque e l'una e l'altra ad amendue le supposizioni soddisfà.

Passo a' numeri divisibili per 4, e non per 6, che esprimo per $4n$, ed osservo, che $\frac{f\omega}{c}$ è logaritmo ancor del numero $\overline{f+\omega}\sqrt[4]{-1}$, onde collo stesso metodo perverrò all'equazione

$$\overline{\frac{f^2\sqrt[4]{-1}}{c}+\frac{y\sqrt[4]{-1}}{n}}^{\,4n}-\frac{f^{4n-1}x}{c^{4n}}=0,$$ la qual

maneggiata a dovere si riduce

$$-\left(\frac{f^2}{c}+\frac{y}{4n}\right)^{4n}-\frac{f^{4n-1}x}{c^{4n}}=0.$$ Similmente

si troverà

$$-\left(\frac{f^2}{c}+\frac{y}{4n}\right)^{4n}-\frac{f^{16n-1}x}{c^{4n}}=0;$$ e così in

tutti gli altri casi, onde generalmente

$$-\left(\frac{f^2}{c}+\frac{y}{2^p n}\right)^{2^p n}-\frac{f^{2^{p+1}n-1}x}{c^{2^p n}}=0.$$ Adunque

fatta $x=+f$, sarà

$$\overline{\frac{f^2}{c}+\frac{y}{2^p n}}^{\,2^p n}+\frac{f^{2^{p+1}n}}{c^{2^p n}}=0;$$ la qual, posto

$\frac{f\omega}{c}=l\overline{f+\omega}$, si troverebbe ponendo $x=-f$. Se poi facciasi $x=+f$, sarà

$$\overline{\frac{f^2}{c}+\frac{y}{2^p n}}^{\,2^p n}-\frac{f^{2^{p+1}n}}{c^{2^p n}}=0,$$ la qual nella

supposizione di $\frac{f\omega}{c}=l\overline{f+\omega}$ si sarebbe trovata facendo $x=+f$. Resta dunque ad evidenza provato, che l'una e l'altra equazione serve tanto al caso di

x

Lettera
del Co. Giordano Riccati al

$x = +f$, quanto al caso di $x = -f$. Le cose finora dette danno a conoscere, che la equazion generale tra i numeri x, ed i logaritmi y è la seguente
$$\overline{\frac{f^2}{c}+\frac{y}{n}}^{\,n} \pm \frac{f^{2n-1}}{c^n}\,x = 0.$$

Per compiere la presente lettera, seguendo le orme del profondo Sig.r Eulero, accenniamo in corte parole, come determinar si possano i logaritmi de' numeri immaginarj $= a+b\sqrt{-1}$. Nel circolo, che ha il raggio $= \frac{f^2}{c}$, che porremo $= r$, si determini l'arco, in cui il seno al coseno sia $:: b : a$, il qual arco chiamisi $= q$. Egli è chiaro, che chiamando $\sqrt{a^2+b^2} = k$, sarà $b = \frac{k\, Sc.q}{r}$, $a = \frac{k\, Cc.q}{r}$; dunque $l\,\overline{a+b\sqrt{-1}} = l\frac{k}{r}\cdot\overline{Cc.q+\sqrt{-1}\cdot Sc.q} = lk - lr + l\,\overline{Cc.q+\sqrt{-1}\cdot Sc.q}$. Basterà dunque di trovare il logaritmo di $Cc.q+\sqrt{-1}\cdot Sc.q$. A ciò fare si avverta essersi da me provato nel cap. 7. lib. p.me tom. 2. delle Istituzioni, che $Cc.q+\sqrt{-1}\cdot Sc.q = r\cdot\overline{1+\frac{q\sqrt{-1}}{nr}}^{\,n}$, posto n infinito. Si ponga dunque nella equazione in luogo di $x = Cc.q+\sqrt{-1}\cdot Sc.q$ il suo valore $r\cdot\overline{1+\frac{q\sqrt{-1}}{nr}}^{\,n}$, e si avrà
$$\overline{r+\frac{y}{n}}^{\,n} \pm \frac{r^{n+1}}{f}\cdot\overline{1+\frac{q\sqrt{-1}}{nr}}^{\,n} = 0, \text{ ovvero}$$
$$\left(\frac{r+\frac{y}{n}}{1+\frac{q\sqrt{-1}}{nr}}\right)^{n} \pm \frac{r^{n+1}}{f} = 0,$$
il qual binomio si può ne' suoi trinomj risolvere. Questo più agevolmente si

eseguirà

35.60

36.4

eseguirà, se restringasi al sistema de' logaritmi iperbolici; facendo $f = e = r$. Ma di ciò sia detto abbastanza, essendo fuori del nostro intento. Se vi prego di esaminare questi miei pensieri con maturità, attribuitelo alla stima, ch'ho del vostro sapere, e giudizio; la qual protestandovi mi rassegno

Bologna li 2. Ottobre 1767.

Lettera quinta di Vincenzo Riccati al Sig.r Ab. Jacopo Pellizzari Professore di Geometria, e di Fisica nel Seminario di Treviso.

Sig.r Ab. Rivmo.

Il Sig.r d'Alembert parlando di una sottile teoria del Sig.r Filippo de la Grange inserita nella sua dissertazione dal Cav. de Foncenex, la rinfaccia, e non senza ragione, che si aggira intorno a tal genere di quantità, di cui non abbiamo netta, e precisa idea. Studiamoci però di diradare la folta nebbia, che ci circonda, e di rischiarare le idee del lodatissimo Autore. S'intenda col centro C, e col raggio $CA = r$ descritto il circolo AQa, e col semiasse stesso AC l'iperbola equilatera de' suoi quattro rami fornita. Menata qualunque CQ, si lasci sopra CA cadere l'ordinata QN, e chiamata $CN = x$, $NQ = y$, sarà $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, la quale posta $x < r$, sarà reale. Adunque

$\sqrt{x^2 - r^2}$

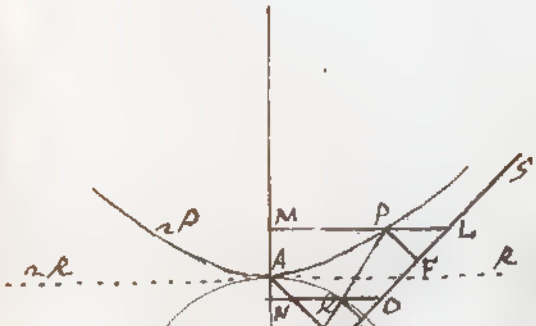


Fig. 4.

Lettera
del Co. Giordano Riccati al ...

$\sqrt{x^2-r^2}$, che equivale a $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{r^2-x^2}$, in questa ipotesi sarà immaginaria: ma $\sqrt{x^2-r^2}$ è l'ordinata all'iperbola, che chiameremo y'; dunque $y'=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{r^2-x^2}$. Possiamo adunque nell'angolo RAC formato dalla tangente AR concepire un'iperbola immaginaria, la cui ordinata y' sia all'ordinata y del cerchio, come $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{r^2-x^2} : \sqrt{r^2-x^2}$, o sia $y' : y :: \sqrt{-1} : 1$, la qual ragione è costante sebbene immaginaria.

Prodotta CQ in P, e menata l'ordinata PM $= y'$, se chiamisi CM $= x$, si avrà l'equazione $y' = \sqrt{x^2-r^2}$, la quale posta $x > r$, sarà reale; dunque $\sqrt{r^2-x^2}$, che equivale a $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{r^2-x^2}$ sarà immaginaria: ma $\sqrt{r^2-x^2}$ è l'ordinata al circolo, che chiamiamo $= y$; dunque $y = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{x^2-r^2}$; dunque $y' : y :: \sqrt{x^2-r^2} : \sqrt{-1}\cdot\sqrt{x^2-r^2} :: 1 : \sqrt{-1}$. È lecito parimente nell'angolo RAM concepire un circolo immaginario, la cui ordinata y sia all'ordinata real dell'iperbola $= y' :: \sqrt{-1} : 1$, che è una ragion data. Quattro curve adunque abbiamo diritto di concepire due reali e due immaginarie; cioè nell'angolo CAR un circolo reale, ed un'iperbola immaginaria, e nell'angolo RAM un'iperbola reale ed un circolo immaginario. Ciò che abbiamo osservato in un quadrante, ed in un ramo d'iperbola, vuolsi egualmente pronunciare degli altri tre.

Poiché si fa un continuo paragone

tra

tra il circolo, e l'iperbola, l'analogia par che domandi, che si parli dei logaritmi analoghi, che sono eguali ai settori iperbolici divisi per la metà del semiasse, come gli archi sono eguali ai settori circolari divisi per la metà del raggio. Di questi dunque parleremo in appresso per maggiore semplicità. Chi amasse di avere i logaritmi iperbolici, basterà, che tutti i numeri moltiplichi per $\sqrt{2}$.
Io accordo al Sig.r De la Grange, che se due curve hanno l'ordinate alla comune assissa in ragion data, non meno l'aje contenute tra le coordinate, che i settori formati dalle linee, che partono dall'origine dell'assissa comune, sono tra loro nella stessa data ragione dell'ordinate. Quindi seguita ad evidenza, che il settor circolare ACQ al settor dell'iperbola immaginaria contenuta nell'angolo CAR sarà come $1 : \sqrt{-1}$. Similmente il settor iperbolico CAP al settor del circolo immaginario contenuto nell'angolo RAM sarà come $1 : \sqrt{-1}$.

Premesse tali chiarissime riflessioni, spero, che saremo in istato di vedere, qual verità si contenga in alcune poche righe, che mi son sempre parute oscurissime. Chiamato l'arco circolare $AQ = \varphi$; sarà $CN = x = Cc.\varphi$, ed $NQ = y = Sc.\varphi$, ed il settore $ACQ = \frac{r\varphi}{2}$, e per conseguenza

Lettera
del Co. Giordano Riccati al

367

quenza il settor iperbolico dalli assissa $CM = x = Cc.\varphi$, e dalli ordinata $MP = y = \sqrt{-1} \cdot Sc.\varphi$ sarà $\frac{v\varphi\sqrt{-1}}{2}$. Questa è una conseguenza, che dalle cose dette di sopra non discende punto. Il settor circolare $ACQ = \frac{v\varphi}{2}$: questo è verissimo: dunque ricavo io quel settor verrà espresso per $\frac{v\varphi\sqrt{-1}}{2}$, il quale ha al settor circolare ACQ la ragion di $\sqrt{-1} : 1$: ma questo non è il settor iperbolico ACP, il quale è reale, ma il settor dalli iperbola immaginaria contenuta nelli angolo CAR. Quindi non il settor iperbolico ACP, ma il settor dalli iperbola immaginaria, posta la comune assissa CN, è uguale ad $\frac{v\varphi\sqrt{-1}}{2}$. Similmente chiamando il logaritmo analogo $= \varphi'$, sarà il settor iperbolico $ACP = \frac{v\varphi'}{2}$, ed il settor del circolo immaginario contenuto nelli angolo RAM sarà $= \frac{v\varphi'\sqrt{-1}}{2}$. Si avverta, che in questo secondo caso non sarà $CM = Cc.\varphi'$, ma $Ch.\varphi'$, e li ordinata CP non sarà $= Sc.\varphi'$, ma $= Sh.\varphi'$; donde segue, che li ordinata al circolo immaginario $= \sqrt{-1} \cdot Sh.\varphi'$.

Supponendo il Sig.r de la Grange, che il settor iperbolico reale ACP sia $= \frac{v\varphi\sqrt{-1}}{2}$, proseguisca il suo calcolo, e perviene ad una formola, che è assai conosciuta. Io per accertare ciò, che si ha nel calcolo di vero, e di falso; tratterò la cosa per guisa, che ogni dubbietà sia rimossa. Con

CA

35'6

36'6

CA faccia angolo semiretto la CS, che sarà l'assintoto della iperbola: produco MP in L, e meno PZ normale a CS'. Chiamo l'assissa CM $= x$, l'ordinata $MP = y'$. È noto, che il logaritmo analogo φ' ha per numero CZ; dunque sarà $\varphi' = l.CZ$. Si meni AB normale a CS', e sarà $CB = AB = \frac{v}{\sqrt{2}}$; dunque $CZ = \frac{v^2}{2.PZ}$: ma essendo $ML = CM$, sarà $PL = CM - MP = x - y'$; dunque $CZ = \frac{v^2}{\sqrt{2}.(x-y')}$; dunque $\varphi' = l\frac{v^2}{\sqrt{2}.(x-y')} = l\frac{v^2\sqrt{2}}{2.(x-y')} = -l\frac{x-y'}{\sqrt{2}}$. Finchè $x > v$, vien ad essere $x = Ch.\varphi'$, $y' = Sh.\varphi'$; dunque $\varphi' = -l\frac{Ch.\varphi' - Sh.\varphi'}{\sqrt{2}}$. Ma passando x ad essere minor di v, il settor iperbolico immaginario vien ad essere $\frac{v\varphi\sqrt{-1}}{2}$, ed il logaritmo analogo $\varphi\sqrt{-1}$, ed $x = Cc.\varphi$, $y' = \sqrt{-1}.Sc.\varphi$; dunque $\varphi\sqrt{-1} = -l\frac{Cc.\varphi - \sqrt{-1}Sc.\varphi}{\sqrt{2}}$

Questa formola, moltiplicato il numero per $\sqrt{2}$, affinchè nascano i logaritmi iperbolici, è quella, a cui arrivò il Sig.r de la Grange, e che è conosciuta da qualche tempo. Ma si avverta, che cotal formola non dinota il logaritmo reale proveniente dalla real iperbola AP, ma il logaritmo immaginario proveniente dalla iperbola immaginaria contenuta nell'angolo CAK; il qual logaritmo sarà

Lettera
del Co. Giordano Riccati al

però si riduca agli archi di circolo im=
maginarj.

Prodotta NQ in O, e menata QG normale a CS, se per custodire l'analogia coll'iperbola, si chiamino CG i numeri degli archi AQ, dinotando colla lettera A l'arco, il cui numero è scritto appresso, sarà $\varphi = A.CG = A.\overline{CO-OG} = A.\overline{NO\sqrt{2}-\frac{QO}{\sqrt{2}}}$ $= A.\overline{NO\sqrt{2}-\frac{NO}{\sqrt{2}}+\frac{NQ}{\sqrt{2}}} = A.\overline{\frac{NO}{\sqrt{2}}+\frac{NQ}{\sqrt{2}}}$ $= A.\frac{\overline{CN+NQ}}{\sqrt{2}}$. Sia $CN=x$, $NQ=y$, sarà $\varphi = A.\frac{x+y}{\sqrt{2}}$. Finchè $x<v$, vien ad esser $x = Cc.\varphi$, $y = Sc.\varphi$; dunque $\varphi = A.\frac{Cc.\varphi+Sc.\varphi}{\sqrt{2}}$. Ma se x diviene $>v$, il settor circolare immaginario vien ad essere $= v\varphi'\sqrt{-1}$, e l'arco del circolo immaginario $= \varphi'\sqrt{-1}$, e $x = Ch.\varphi'$, $y = Sh.\varphi'\sqrt{-1}$; dunque $\varphi'\sqrt{-1} = A.\frac{Ch.\varphi'+\sqrt{-1}.Sh.\varphi'}{\sqrt{2}}$, la qual formola non indica l'arco reale appartenente al circolo, AQ, ma l'arco immaginario appartenente al circolo immaginario contenuto nell'angolo MAK, il quale si riduce ai logaritmi immaginarj.

Ma seguitiamo il Sig.r de la Grange, che dalla formola trovata pas=sa, com'egli pensa, a determinare tutti i logaritmi di $\frac{\pm v}{\sqrt{2}}$ (prendo $\frac{\pm v}{\sqrt{2}}$, perchè io seguo il sistema de' logaritmi analoghi: egli seguendo quello degli iperbolici, cerca i logaritmi di $\pm v$.) Si faccia $\varphi = \lambda\pi$, posto λ un numero

qualunque

350

370

qualunque incominciando dal nulla, e π l'intera circonferenza, si avrà $Sc.\lambda\pi = 0$; e $Cc.\lambda\pi = r$; adunque $-l\frac{r}{\sqrt{r}} = \lambda\pi\sqrt{-1}$, e facendo π negativo, $l\frac{r}{\sqrt{r}} = \lambda\pi\sqrt{-1}$; dunque generalmente $l\frac{r}{\sqrt{r}} = \pm\lambda\pi\sqrt{-1}$, che gittato in serie darà di $l\frac{r}{\sqrt{r}}$ i seguenti valori
$0, \pm\pi\sqrt{-1}, \pm 2\pi\sqrt{-1}, \pm 3\pi\sqrt{-1}$ &c.
All'opposto se si faccia $\varphi = \frac{\overline{2\lambda-1}}{2}.\pi$, egli è manifesto, che $Sc.\frac{\overline{2\lambda-1}}{2}.\pi = 0$, e $Cc.\frac{\overline{2\lambda-1}}{2}.\pi = -r$; dunque $-l\frac{-r}{\sqrt{r}} = \frac{\overline{2\lambda-1}}{2}.\pi\sqrt{-1}$, e facendo π negativo, $l\frac{-r}{\sqrt{r}} = \frac{\overline{2\lambda-1}}{2}.\pi\sqrt{-1}$; dunque generalmente $l\frac{-r}{\sqrt{r}} = \pm\frac{\overline{2\lambda-1}}{2}.\pi\sqrt{-1}$, o sia ad un termine della seguente serie
$\pm\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}, \pm\frac{3}{2}\pi\sqrt{-1}, \pm\frac{5}{2}\pi\sqrt{-1}$ &c.
Quindi il $l\frac{r}{\sqrt{r}}$ ha un valore reale $= 0$, e tutti gli altri immaginarj: all'opposto $l\frac{-r}{\sqrt{r}}$ li ha tutti immaginarj, e niuno reale; la qual conseguenza si accorda perfettamente con ciò, che con altro metodo ha ritrovato il Eulero.

Non dipartiamoci dal metodo del Sig.r de la Grange, e facciam vedere, che i logaritmi da lui trovati non sono tutti, sebbene siano infiniti. L'arco AQ è determinato dalle rette CA, CP formanti l'angolo $= \frac{q}{r}$, la prima delle quali è fissa, la seconda mobile

mobile e variabile. Ma tra questa volta è compreso non meno l'arco aq, che l'AQ; onde l'uno e l'altro $= \varphi$; e nello angolo Car si dee concepire un' iperbola immaginaria simile ed eguale a quella, ch'è contenuta nello angolo CAK, i cui settori immaginarj, e per conseguenza i logaritmi analoghi verranno espressi per l'arco $aq = \varphi$. Si avrà pertanto per le cose dimostrate $\varphi\sqrt{-1} = -\int \overline{Cc.\varphi - Sc.\varphi\sqrt{-1}} \over \sqrt{2}$, e prendendo φ negativo $\varphi\sqrt{-1} = \int \frac{Cc.\varphi - Sc\varphi\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, onde generalmente $\varphi\sqrt{-1} = \pm \int \frac{Cc.\varphi \pm Sc.\varphi\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$.

Se pongasi $\varphi = \lambda\pi$, sarà $Sc.\varphi = 0$, $Cc.\varphi = -v$; dunque $\int \frac{-v}{\sqrt{2}} = \pm \lambda\pi\sqrt{-1}$, cioè il logaritmo di $\frac{-v}{\sqrt{2}}$ sarà uno de' seguenti termini

0, $\pm \pi\sqrt{-1}$, $\pm 2\pi\sqrt{-1}$, $\pm 3\pi\sqrt{-1}$ &c.,

i quali sono quegli stessi, che si sono trovati pel numero $\frac{+v}{\sqrt{2}}$ poco dianzi. Che se facciasi $\varphi = \frac{2\lambda - 1}{2}.\pi$ sarà $Sc.\varphi = 0$, e $Cc.\varphi = v$; dunque $\int \frac{v}{\sqrt{2}} = \pm \frac{2\lambda - 1}{2}.\pi\sqrt{-1}$; e per conseguenza i logaritmi di $+\frac{v}{\sqrt{2}}$ saranno $\pm \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, $\pm \frac{3}{2}\pi\sqrt{-1}$, $\pm \frac{5}{2}\pi\sqrt{-1}$ &c. che dianzi erano i logaritmi di $\frac{-v}{\sqrt{2}}$

Apparisca dunque chiarissimo, che i due numeri $\frac{+v}{\sqrt{2}}$, $\frac{-v}{\sqrt{2}}$ hanno i medesimi logaritmi tutti immaginarj eccettuato uno, che $= 0$.

Per altro mi sembra strano, che i

35·61

372

i logaritmi reali si vogliano desumere dai rami della iperbola immaginarj, che sono contenuti negli angoli CAR, CAaR, Car, Caar, e non dai rami reali. E se per mezzo loro fortunatamente ritrovasi il logaritmo reale di $\pm \frac{r}{\sqrt{2}}$, questo proviene, perchè ivi è il confine dell'immaginario, e del reale. La formola, che ricavasi dalle reali iperbole, è la seguente $\varphi' = \pm\, l\, \frac{Ch.\varphi' \pm Sh.\varphi'}{\sqrt{2}}$; che niente di immaginario contiene. Se si ponga $\varphi' = 0$, sarà $Sh.\varphi' = 0$, $Ch.\varphi' = \pm r$; dunque $l \pm \frac{r}{\sqrt{2}} = 0$.

Potrei aggiungere altre riflessioni, che mi verrebbero somministrate dalla analogia tra il circolo e la iperbola: ma quelle, ch'ho esposte, penso io, che bastino a rischiarare il recondito raziocinio del dottissimo Sig.r De la Grange, e a discuoprire, che la considerazion della iperbola dimostra, che i numeri negativi hanno un logaritmo reale, siccome lo hanno i numeri positivi. Voi Sig. Ab. Ch.mo abbiate la bontà di esaminare questa ultima lettera, e di significarmi, se per vostro giudizio abbia colpito nel segno. Di ciò pregandovi rinnovo la mia servitù sottoscrivendomi

Bologna li 7 Ottobre 1767

Lettera
del Co. Giordano Riccati al
Sig.r Ab. Iacopo Pellizzari
Professore di Geometria,
e di Fisica nel Seminario
di Trevigi intorno a' Loga=
ritmi de' numeri negativi

Sig.r Ab. Riv.mo

Prima di farla tenere a Voi,
Sig.r Ab. Riv.mo, ho letto con tutta la
attenzione la terza Lettera di mio
Fratello intorno a' Logaritmi de'
numeri negativi. Per dir il vero
egli penetra talmente al fondo più
intimo della tanto dibattuta ques=
tione, che dopo la mentovata let=
tera sembra non potersi più met=
tere in ragionevole controversia
l'esistenza dei reali logaritmi
corrispondenti ai numeri negati=
vi, e che da due rami eguali e
reali, l'uno spettante ai numeri po=
sitivi, e l'altro ai negativi, sia
formata la logaritmica. Quantun=
que ora tal verità sia stata posta
da mio Fratello in tutto il suo lume;
giudico di renderla ancora più
palpabile con una osservazione,
che ho l'onor di comunicarvi.

Una determinata logaritmica
dipende dalla sottotangente c, e
perciò questa sola costante ha luo=
go nella equazione differenziale
dalla

dalla nostra curva $\frac{c\,dx}{x} = dy$.
Ci entra implicitamente la mentovata
costante anche nella formola integrata
$lx = y$, dovendosi sottointendere,
che i logaritmi si prendano nella
logistica della suttangente c. Per
aver poi un dato sistema di logarit-
mi, egli è d'uopo fissare il protonu-
mero f, a cui corrisponda il logarit-
mo $y = o$, onde posto $y = o$, si abbia
$x = f$. Con tale stabilimento si ottie-
ne un determinato sistema di loga-
ritmi nella logistica della sottotan-
gente c.

Volendo far transito dalla formo-
la $y = lx$ alla esponenziale, non bas-
tano le due costanti c, f; ma biso-
gna inoltre valersi di due coordi-
nate h, g della nostra logistica, la
prima delle quali in riguardo al
protonumero f sia il logaritmo,
e la seconda il numero corrispon-
dente. Giusta l'uso comune si fa
$h = f$, $g = a$, che si chiama base del-
la logistica: ma io non voglio ri-
stringermi a questa ipotesi, e mi
riservo di poter assegnare alle pre-
dette due coordinate qualunque cop-
pia di valori relativi, che apparte-
tengano al ramo dei numeri posi-
tivi, sul quale non cade controversia

veruna

veruna. Essendo dunque $h = lq$, avre-
mo $\frac{y\,lq}{h} = lx$, e conseguentemente
$f\left(\frac{q}{h}\right)^{\frac{y}{h}} = x$: Conciossiachè ad h può
competere qualunque valore, stabi-
lito il quale è altresì fissato il rela-
tivo valore di q, è in mia potestà
lo scegliere una tale grandezza di h,
che stia ad y come il numero pari
n all'impari m, onde abbiasi $\frac{y}{h} =$
$\frac{m}{n}$. Sarà pertanto $f\left(\frac{q}{f}\right)^{\frac{y}{h}} = f\left(\frac{q}{f}\right)^{\frac{m}{n}} =$
$\pm f\sqrt[n]{\left(\frac{q}{f}\right)^m} = x$; e quindi a qualsivo-
glia logaritmo y corrisponderanno
due numeri uguali x, uno positi-
vo, e l'altro negativo, posto il
protonumero $= \pm f$.

Nella prima Lettera a Voi di-
retta, Sig.r Ab. [illegible], afferma mio
Fratello potersi proporre due di-
versi problemi, che non si vogliono
insieme confondere. Il primo si è:
dato il protonumero, e la sottotangente,
descriver la logaritmica, e determi-
nar il sistema: l'altro: dato il pro-
tonumero, e la base, determinar
la logaritmica, ed il sistema. Sog-
giugne poscia: la soluzion del pri-
mo problema si conduce ad una
curva dotata di due rami, e ad un
sistema, in cui i logaritmi delle
assisse negative sono eguali a quei
delle positive. La soluzion del
secondo

secondo porge una curva composta di un solo ramo, in cui alle sole ascisse positive corrispondono le ordinate, o sia i logaritmi reali. La ragione, su cui si fonda, consiste in ciò, che nel primo problema la base e infinitiforme rimane indeterminata; e quindi può scegliersi sempre un appropriato valore, che faccia sì, che lo stesso logaritmo y corrisponda ai numeri ± x. Ma nel secondo problema essendo la base e determinata, benchè ne risultino infiniti logaritmi reali y, che si riferiscono ai numeri ± x, ne rimangono infiniti immaginarj; e per conseguenza la logaritmica ha il solo ramo dei numeri positivi.

La mia idea si appoggia ad una differente ragione. La soluzion del primo problema si riguarda ad una curva fornita di due rami; perchè dato il protonumero, e la suttotangente, resta indeterminato il valore relativo delle coordinate h, g, che è infinitiforme; e perciò, come ho provato, la logaritmica ha due rami. La soluzione del secondo problema dà un solo ramo, perchè si assegna un solo valore alle coordinate h, g, ponendo h = f, g = e, ed intendendo per e l'ascissa positiva; a cui si adatta l'ordinata

f

è altresì positiva eguale al protonumero, il qual solo valore non basta per determinare il ramo delle assisse negative, che abbisogna delle predette coordinate infinitiformi.

Ora mettiamo al confronto la ragione del Fratello, e la mia. Acciocchè la Logaritmica sia fornita di due rami; alla sua base deggiono secondo lui adattarsi infiniti valori, che eccettuati due soli ± e sono tutti immaginarj, non esistono in natura, nè sono dalla geometria conosciuti. Al contrario le infinite coordinate h, g, che secondo me si richiedono per la formazione dei due rami della nostra curva, sono tutte reali; appartengono geometricamente alla logistica, e si possono a piacimento determinare. Veda dunque il Sig.r Ab., che il mio metodo è geometrico, e quello di mio Fratello soltanto analitico.

Inoltre il mio metodo determina i numeri ± x anche quando è irrazionale il valore del logaritmo y; ed il suo a questo caso non si estende, avendo bisogno di ricorrere alla costruzione della logistica col mezzo della quadratura dell'iperbola.

Aggiungasi, che egli deduce esser e infinitiforme dalla formula

$$\frac{1}{2c}$$

$\frac{f}{hc} = \frac{a-f}{a+f} + \frac{\overline{a-f}^3}{3\cdot\overline{a+f}^3} + \frac{\overline{a-f}^5}{5\cdot\overline{a+f}^5} + \frac{\overline{a-f}^7}{7\cdot\overline{a+f}^7}$ &c.

in cui la base può avere i valori: a, $-a$, $a\sqrt{-1}$, $a\sqrt[4]{1}$, $a\sqrt[4]{-1}$ &c. che abbisognano per delineare il ramo della logistica coi numeri negativi, i quali eccettuati i due primi sono tutti immaginarj. Il mio metodo procede con maggiore naturalezza. In fatti avendo stabilito nel mio trattato nel primo Tomo di Opuscoli

$l f\cdot\frac{f+x}{f-x} = 2c\cdot\frac{x}{f} + \frac{x^3}{3f^3} + \frac{x^5}{5f^5} + \frac{x^7}{7f^7}$ &c.;

si faccia $f\cdot\frac{f+x}{f-x} = g$, onde il suo logaritmo $= h$. Si avrà $x = f\cdot\frac{g-f}{g+f}$; dunque effettuate le sostituzioni,

$\frac{h}{2c} = \frac{g-f}{g+f} + \frac{\overline{g-f}^3}{3\cdot\overline{g+f}^3} + \frac{\overline{g-f}^5}{5\cdot\overline{g+f}^5} + \frac{\overline{g-f}^7}{7\cdot\overline{g+f}^7}$ &c.;

formola, che sempre si avvera, qualunque coppia di valori relativi si attribuisca alle coordinate g, h.

Maggiore osservazione merita l'altra formola

$e = f\cdot 1 + \frac{f}{c} + \frac{f^2}{2\cdot c^2} + \frac{f^3}{2\cdot 3\cdot c^3} + \frac{f^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot c^4}$ &c.,

che si deduce dall'equazione generale

$f+x = f\cdot 1 + \frac{z}{c} + \frac{z^2}{2\cdot c^2} + \frac{z^3}{2\cdot 3\cdot c^3} + \frac{z^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot c^4}$ &c.

contenuta nel citato Tomo di Opuscoli, in cui $f+x$ denota il numero, z il logaritmo, ponendo e in cambio di $f+z$, ed f in cambio di z. Essendo dati f, e c, la base e non può avere, salvochè

salvochè una sola grandezza, se ha da realizzare la detta equazione, la qual escluda tutti gli altri valori richiesti dal metodo di mio fratello, che ascendono ad un numero infinito. Schiva un tale disordine chi abbraccia il mio metodo; imperocchè sostituito y in vece di $f.x$, h in vece di z, ne risulta

$$y = f \cdot \overline{1 + \frac{h}{c} + \frac{h^2}{2\cdot c^2} + \frac{h^3}{2\cdot 3\cdot c^3} + \frac{h^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot c^4}} \; \&c.,$$

equazione, che si accorda sempre col vero, qualunque valore reale si adatti alle coordinate y, h.

Poichè appropriate a y, e ad h le convenienti grandezze, $f \cdot \pm\left(\frac{y}{f}\right)^{\frac{y}{h}} = x$, e dinotato il valore positivo di $\left(\frac{y}{f}\right)^{\frac{y}{h}} = \left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{y}{f}}$, averemo $f \cdot \pm\left(\frac{y}{f}\right)^{\frac{y}{h}} = \pm f \cdot \left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{y}{f}} = x$. Nel primo degli omogenei di comparazione il segno $\pm$ modifica la quantità esponenziale, che scelti gli opportuni valori y, ed h può essere positiva, e negativa: nel secondo omogeneo di comparazione non potendo generalmente esser ambigua il segno della grandezza $\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{y}{f}}$, il segno $\pm$ cade sopra il protonumero f. Quindi quegli stessi due rami, che si descrivono col solo protonumero $+f$, supposta

la

le coordinate y, h infiniformi[?], si delineano parimente, assegnato ad x un dato valore, con due prolungamenti $\pm f$, il primo dei quali serve al ramo dei numeri positivi, il secondo a quello dei numeri negativi.

Crederei d'avere sparso qualche lume sul celebre argomento dei logaritmi dei numeri negativi, se questi miei pensamenti verranno approvati da Voi, Sig. Ab. Riv.mo, che stimo moltissimo, ed a cui ho l'onore di protestarmi

Trevigi li 29 Ottobre 1767

P. S. Per ottenere l'intero ramo dei numeri negativi, basta il determinare le due coordinate y, h colla condizione, che h si agguagli ad un numero pari, onde si abbia $f(\frac{y}{h})^{\frac{y}{h}} = \pm f\sqrt[h]{(\frac{y}{h})^y} = x$. Io le ho considerate infiniformi a cagione di schivare l'obbiezione, che potrebbe farsi, quando essendo ancor y un numero pari, la frazione ridotta $\frac{y}{h}$ si agguagliasse ad $\frac{m}{n}$, in cui n pareggiasse un numero impari. Quantunque io era persuaso, che la mentovata frazione non debba ridursi; nulladimeno ho preferito le coordinate infiniformi; perchè in tal modo è libero da qualunque eccezione.

Lettera III.
al Sig.r Co. Girolamo
Tenaroli.
Contenuta nel Giornale di Modena Tomo XVII
N.o VIII. pag. 136. anno 1779.

381

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Lettera III.

Del Sig.r Co. Giordano Riccati
al Sig.r Co. Girolamo [illegible],
in cui supponendosi applicata
una penna al punto medio
di una corda, si determina
lasciata che sia in libertà,
il tempo impiegato a passare
dalla prima posizione alla
curva isocrona bilanciata
o semplice di un ventre solo,
ovvero composta delle due
semplici di un solo ventre
di tre semplici vibrazioni.

Nella mia prima Lettera ho indagato l'artifizio, di cui la Natura si serve per far sì, che incitata una corda al suono, si adatti in brevissimo tempo ad una curva bilanciata ed isocrona. Ora, Ornatissimo Sig.r Conte, mi è riuscito di muovere qualche altro passo determinando primieramente la figura, in cui si accomoda una corda, al punto medio della quale da principio è stata applicata una penna, quando prima di ripiegarsi nella curva isocrona bilanciata di un ventre solo, ha fatto intera vibrazione. Cerco poscia la rettificazione della figura predetta, la quale mi insegna quanto la corda si sia accorciata, e quanti [illegible] abbia esercitato la forza pendente. E poiché tutti i punti della corda giungono ad essa curva nel medesimo istante, intanto si

ottiene

osservazioni, ugualmente che a cagione delle brevissime intervalli comunicazioni di moto, gli elementi della corda stessa si muovono come se fossero accelerati da forze uguali agli spazj da percorrersi sino al punto medio della vibrazione divisi per una costante. Questa riflessione mi conduce a trovare l'azione esercitata, in riguardo a ciascun elemento pervenuto che sia alla metà della vibrazione dalla relativa forza, ed indi la somma delle predette azioni, la quale dovendo uguagliarsi all'azione esercitata dalla forza tendente, da una tal equazione si raccoglie il valore dell'assunta costante, alla cui radice divisa per la radice della lunghezza del pendolo a secondi s'eguaglia il tempo, che impiegherebbe la corda a passare dalla prima posizione alla curva isoperimetra bilanciata di un solo ventre, il qual tempo vien espresso in secondi. Esposto in tal guisa il progresso dei miei pensamenti, passo a dichiararli partitamente.

Sia AXB (fig. 1a) la figura primitiva angolare, ed AONMZB la curva isoperimetra bilanciata di un solo ventre, in cui si spiega la corda nell'ultimo istante della prima vibrazione, che più acconciamente può chiamarsi bilanciamento. Segnata $BH = x$, e tirata l'ordinata $HZ = y$, ho dimostrato

nella

[illegible]

nella prima Lettera essere $HR = \frac{bx\sqrt{r}}{L}$, onde si abbia per conseguenza $KZ = y - \frac{bx\sqrt{r}}{L}$. Dividendo questa linea per mezzo nel punto T, sarà KT lo spazio scorso con moto accelerato dal punto K nel tempo della prima mezza vibrazione.

Ora se ad $KT = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\frac{bx\sqrt{r}}{L}$ aggiungeremo $HK = \frac{bx\sqrt{r}}{L}$, ne risulterà $HT = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\frac{bx\sqrt{r}}{L} = q$, o sia ponendo in cambio di y il suo valore $Sen.\frac{2bx}{L}$ scoperto nella seconda Lettera, $\frac{1}{2}Sen.\frac{2bx}{L} + \frac{1}{2}\frac{bx\sqrt{r}}{L} = q$, equazione della curva BTMX, a cui si riduce la corda dopo la prima mezza vibrazione.

Pongo BT = z, e poiché $dz = \sqrt{dx^2 + dq^2} = dx + \frac{dq^2}{2dx}$, e $dq = \frac{1}{2}dy + \frac{1}{2}\frac{bdx\sqrt{r}}{L}$, troveremo $dz = dx + \frac{\frac{1}{4}dy^2}{2dx} + \frac{1}{2}\frac{b\,dy\,dx\sqrt{r}}{2Ldx} + \frac{1}{2}\frac{b^2dx^2}{2L^2dx} = dx + \frac{b^2dx}{4L^2} + \frac{b\,dy\sqrt{r}}{4L} + \frac{dy^2}{8dx}$, ed integrando

$$z = x + \frac{b^2x}{4L^2} + \frac{b\sqrt{r}}{4L}Sen.\frac{2bx}{L} + \int\frac{dy^2}{8dx}$$

In luogo di dy sostituisco il suo valore $\frac{1}{b}Cos.\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2bdx}{L}$, e viene $\int\frac{dy^2}{8dx} = \frac{b}{2L^2}\cdot 2\int Cos.\frac{2bx}{L}^2\cdot\frac{2bdx}{L}$: ma per la formola stabilita nelle Istituzioni Analitiche del Conte Vincenzo mio fratello (Tom. 2 cap. 10. § 31.)

$$\overline{m+n}\int \overline{Sen.\frac{2bx}{L}}^{n-1}\cdot\overline{Cos.\frac{2bx}{L}}^{m+1}\cdot\frac{2bdx}{L} = \overline{Sen.\frac{2bx}{L}}^{n}\cdot\overline{Cos.\frac{2bx}{L}}^{m} + m\int\overline{Sen.\frac{2bx}{L}}^{n-1}\overline{Cos.\frac{2bx}{L}}^{m-1}\cdot\frac{2bdx}{L},$$

fatto $m = n = 1$, $2\int Cos.\frac{2bx}{L}^2\cdot\frac{2bdx}{L} =$

38

$c\,\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L} + c^2\frac{2bx}{L}$, di quì ~~conforme è stabilito nella Meccanica Analitica del Cav. Venturi~~ ~~(Tom. … Cap. 10 …)~~; dunque

$$S.\frac{dy^2}{4dx} = \frac{b}{8Lc}.\,\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L} + \frac{b}{8L}.\frac{2bx}{L},$$

e finalmente $z = x + \frac{b^2x}{4L^2} + \frac{b\sqrt{2}}{4L}\text{Sen.}\frac{2bx}{L}$ $+ \frac{b}{8Lc}\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L} + \frac{b}{4L}.\frac{2bx}{L}$. Posto $x = \frac{1}{2}L$, onde sia $\frac{2bx}{L} = b$, $\text{Sen.}\frac{2bx}{L} = \text{Sen.}\,b = c$, $\text{Cos.}\frac{2bx}{L} = \text{Cos.}\,b = 0$, avremo $BTMV = z = \frac{1}{2}L + \frac{b^2}{8L} + \frac{bc\sqrt{2}}{4L}$ $+ \frac{b^2}{8L} = \frac{1}{2}L + \frac{b^2 + bc\sqrt{2}}{4L}$.

Si ricavi la conseguenza, che mentre la corda BX è passata nella positura $BTMV$, si è accorciata per la quantità $BX - BTMV$: e conciossiachè per la prima lettera $BX = \frac{1}{2}L + \frac{b^2}{2L}$, sarà $BX - BTMV = \frac{b^2 - bc\sqrt{2}}{4L}$, e nel detto transito la forza p tendente la corda avrà esercitata l'azione $= p.\frac{b^2 - bc\sqrt{2}}{4L}$.

Dovendo tutti i punti della corda BX adattarsi nel medesimo istante alla curva $BTMV$, egli è di uopo che le forze acceleratrici siano come gli spazj da percorrersi; dimodochè si eguaglino ai detti spazj divisi per la costante a, di cui si

dovrà

dovrà determinare il valore. Questa legge richiede, che la forza acceleratrice, che nel punto k era uguale ad $\frac{kT^2}{a}$, e nel punto T pareggia il nulla, abbia, quando il punto k è giunto in T, fatta l'azione $\frac{kT^2}{2a}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{r}\,\text{Sen.}\frac{rbx}{L} - \frac{1}{r}\frac{bx\sqrt{r}}{L}\right)^2}{2a} =$$

$$\frac{\text{Sen.}\frac{rbx}{L}^2 - \frac{2bx\sqrt{r}}{L}\,\text{Sen.}\frac{rbx}{L} + \frac{rb^2x^2}{L^2}}{4a}.$$ Una tale quantità moltiplicata per la massa $\frac{M\,dx}{L}$ della particola HK mi dà l'azione della forza sollecitante la mentovata particola $= \frac{M\,\text{Sen.}\frac{rbx}{L}^2 dx}{4aL}$

$$- \frac{2Mb\,\text{Sen.}\frac{rbx}{L}\cdot x\,dx\sqrt{r}}{4aL^2} + \frac{rMb^2x^2dx}{4aL^3},$$

ed il suo integrale mi somministra, quando $x = L$, la somma di tutte le azioni seguite rispettivamente alle particole componenti la semicorda BX, la qual somma deve pareggiare l'azione $P\frac{b^2 - bc\sqrt{r}}{4L}$ acquistata dalla forza P stirante la corda.

Per ottenere l'integrazione del primo termine $\frac{M.\,\text{Sen.}\frac{rbx}{L}^2\cdot dx}{4aL}$ =

$\frac{M}{4rab}\cdot r\,\text{Sen.}\frac{rbx}{L}^2\cdot\frac{rb\,dx}{L}$, ricorro al canone $m\int \text{Sen.}\frac{rbx}{L}^m\cdot\frac{rb\,dx}{L} =$

$m-1\cdot c^2\int \text{Sen.}\frac{rbx}{L}^{m-2}\cdot\frac{rb\,dx}{L} - c\,\text{Sen.}\frac{rbx}{L}^{m-1}\cdot\text{Cos.}\frac{rbx}{L}$ dimostrato nelle citate Istituzioni (Tom. 2. Cap. 10. § 13.), e ponendo $m = 2$

trovo

38

novo $2\int \text{Sen}.\frac{2bx}{L}^2 . \frac{2bdx}{L} = c^2 . \frac{2bx}{L}$
$- c\,\text{Sen}.\frac{2bx}{L}\,\text{Cos}.\frac{2bx}{L}$, e perciò

$$\int \frac{M.\,\text{Sen}.\frac{2bx}{L}^2 . dx}{8aL} = \frac{Mc^2}{32ab} . \frac{2bx}{L} - \frac{Mc}{32ab}\,\text{Sen}.\frac{2bx}{L}\,\text{Cos}.\frac{2bx}{L}$$

Passo al secondo termine

$$-\frac{2Mb\,\text{Sen}.\frac{2bx}{L} . x\,dx\,\sqrt{2}}{8aL^2} =$$

$$-\frac{M\sqrt{2}}{16ab} . \frac{2bx}{L} . \text{Sen}.\frac{2bx}{L} . \frac{2bdx}{L}$$

$$-\frac{M\sqrt{2}}{16ab} . \frac{2bdx}{L} . \int \text{Sen}.\frac{2bx}{L} . \frac{2bdx}{L}$$

$$+\frac{M\sqrt{2}}{16ab} . \frac{2bdx}{L} \int \text{Sen}.\frac{2bx}{L} . \frac{2bdx}{L}$$, ed in-

tegrando mi si presenta

$$\int -\frac{2Mb\,\text{Sen}.\frac{2bx}{L} . x\,dx\,\sqrt{2}}{8aL^2} =$$

$$-\frac{M\sqrt{2}}{16ab} . \frac{2bx}{L} \int \text{Sen}.\frac{2bx}{L} . \frac{2bdx}{L}$$

$$+\frac{M\sqrt{2}}{16ab} \int \frac{2bdx}{L} \int \text{Sen}.\frac{2bx}{L} . \frac{2bdx}{L}$$: ma

siccome è noto $\int \text{Sen}.\frac{2bx}{L} . \frac{2bdx}{L} =$
$-c\,\text{Cos}.\frac{2bx}{L}$; dunque la nostra

sommatoria $= \frac{Mc\sqrt{2}}{16ab} . \frac{2bx}{L}\,\text{Cos}.\frac{2bx}{L}$

$-\frac{Mc\sqrt{2}}{16ab} . \int \text{Cos}.\frac{2bx}{L} . \frac{2bdx}{L}$, e perchè

$\int \text{Cos}.\frac{2bx}{L} . \frac{2bdx}{L} = c\,\text{Sen}.\frac{2bx}{L}$, avre-

mo finalmente $\int -\frac{2Mb\,\text{Sen}.\frac{2bx}{L} . x\,dx\,\sqrt{2}}{8aL^2}$

$$= \frac{Mc\sqrt{2}}{16ab} . \frac{2bx}{L}\,\text{Cos}.\frac{2bx}{L} - \frac{Mc^2\sqrt{2}}{16ab}\,\text{Sen}.\frac{2bx}{L}$$

Il terzo termine $\frac{2Mb^2x^2dx}{8aL^3}$

perciò un-

ha per integrale $\frac{Mb^2x^3}{12aL^3}$.

Scriveremo pertanto

$$\frac{\int M\,\mathrm{Sen.}\frac{2bx}{L}\cdot dx}{8aL} - \frac{\int Mb\,\mathrm{Sen.}\frac{2bx}{L}\cdot x\,dx\sqrt{2}}{4aL^2}$$

$$+\int\frac{Mb^2x^2dx}{4aL^3} = \frac{Mc^2}{32ab}\cdot\frac{2bx}{L}$$

$$-\frac{Mc}{32ab}\,\mathrm{Sen.}\frac{2bx}{L}\,\mathrm{Cos.}\frac{2bx}{L} + \frac{Mc\sqrt{2}}{16ab}\cdot\frac{2bx}{L}\,\mathrm{Cos.}\frac{2bx}{L}$$

$$-\frac{Mc^2\sqrt{2}}{16ab}\,\mathrm{Sen.}\frac{2bx}{L} + \frac{Mb^2x^3}{12aL^3}.$$

Non ha aggiunta costante, perchè rettamente la sommatoria si annulla, quando $x = 0$.

Posto $x = \frac{1}{2}L$, ne risulta $\frac{2bx}{L} = b$, $\mathrm{Sen.}\frac{2bx}{L} = \mathrm{Sen.}\,b = c$, $\mathrm{Cos.}\frac{2bx}{L} = \mathrm{Cos.}\,b = 0$, e quindi la predetta sommatoria $= \frac{Mc^2}{32a} - \frac{Mc^3\sqrt{2}}{16ab} + \frac{Mb^2}{96a} = P\cdot\frac{b^2-bc\sqrt{2}}{4L}$, cioè a dire la somma delle azioni della forza, che si suppongono applicate alla particola della semicorda B.X, uguale alla venta azione della forza tendente P.

Da tal equazione si deduce il valore della resistenza $a = \frac{3LMbc^2 - \sqrt{2}\cdot 6LMc^3 + LMb^3}{24P\cdot(b^3 - b^2c\sqrt{2})}$. Poichè $c = b\cdot\frac{226}{355}$, e $b = c\cdot\frac{355}{226}$, il predetto valore si può esprimer così

$$\frac{3LMbc^2 + LMbc^2\cdot\left(\frac{355}{226}\right)^2 - \sqrt{2}\,LMbc^2\cdot 6\cdot\frac{226}{355}}{24P\cdot\left(b^3 - b^3\sqrt{2}\cdot\frac{226}{355}\right)} =$$

$$= \frac{LMc^2}{4Pb^2}\cdot\frac{3+\left(\frac{355}{226}\right)^2-6\cdot\frac{226}{355}\sqrt{2}\ \dots}{6-6\cdot\frac{226}{355}\sqrt{2}}$$

Mi insegna il computo essere $\left(\frac{355}{226}\right)^2 = 2,4674$, $\sqrt{2} = 1,4142$, $\frac{226}{355} = 0,63662$; $6\cdot\frac{226}{355}\sqrt{2} = 5,4017$, e quindi $a = \frac{LMc^2}{4Pb^2}\cdot\frac{657}{5983} = \frac{LMc^2}{4Pb^2}\cdot\frac{1}{9}$ prossimamente.

Chiamata h la lunghezza di un pendolo a secondi, ho altrove stabilito nella Dissertazione del Suono falso essere il tempo di una vibrazione $= t = \sqrt{\frac{a}{h}}$. Sarebbe dunque nel nostro caso t (o 120) $= \frac{c}{2b}\sqrt{\frac{LM}{hP}\cdot\frac{1}{3}}$; ma le vibrazioni della corda si fanno nel tempo $= \frac{c}{2b}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$; dunque non è possibile, che si adatti alla curva d'un solo ventre; perchè contro la sua natura nel passaggio dalla prima posizione alla detta curva, isocro-na istantaneamente impiegherebbe la terza parte in circa del tempo d'una sua vibrazione.

Tentiamo presentemente, nobilissimo Sig. Conte, la soluzione d'un problema più difficile, cavando il tempo speso nel transito dalla prima posizione AXB (Fig. 2.) alla

Dunque —

alla curva A O N M Z B composta dalla due di un ventre solo, e di tre ventri. Supposto che la massima ordinata della curva di tre ventri sia $= gc$, la curva composta vien espressa dall'equazione $y = \text{Sen.}\frac{2bx}{L} + g\,\text{Sen.}\frac{6bx}{L}$, siccome nella seconda Lettera ho determinato, quando in vicinanza del punto B sono positive ambo le ordinate delle curve semplici componenti.

Do principio dal cercare la rettificazione di questa curva. Essendo $ds^2 = dx^2 + dy^2$, avremo, supponendosi dy minima in riguardo a dx, $ds = dx + \frac{dy^2}{2dx}$, e perciò $s = x + \int \frac{dy^2}{2dx}$. Poiché $y = \text{Sen.}\frac{2bx}{L} + g\,\text{Sen.}\frac{6bx}{L}$, avremo differenziando $dy = \frac{2b\,dx}{Lc}\text{Cos.}\frac{2bx}{L} + 3g.\frac{2b\,dx}{Lc}\text{Cos.}\frac{6bx}{L}$: ma pel calcolo dei seni $\text{Cos.}\frac{6bx}{L} = \frac{\overline{\text{Cos.}\frac{2bx}{L}}^3 - 3\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^2}{c^2}$; dunque

$$dy = \frac{2b\,dx}{cL}\left(\text{Cos.}\frac{2bx}{L} + 3g\frac{\overline{\text{Cos.}\frac{2bx}{L}}^3 - 9g\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^2}{c^2}\right) =$$

$$\frac{2b\,dx}{cL}\left(\frac{\overline{1+3g}\,.\,\overline{\text{Cos.}\frac{2bx}{L}}^3 - 12g\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^2}{c^2}\right),$$

e perciò $\frac{dy^2}{2dx} =$

$$\frac{2b^2dx}{c^2L^2}\left(\frac{\overline{1+3g}^2\,\overline{\text{Cos.}\frac{2bx}{L}}^6 - \overline{24g-72g^2}\,\overline{\text{Cos.}\frac{2bx}{L}}^4\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^2}{c^4}\right.$$

$$\left. + \frac{144g^2\,\overline{\text{Cos.}\frac{2bx}{L}}^2\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^4}{c^4}\right).\ \text{Il perché}$$

scopriremo

38

saprà avremo $s = x : + \frac{\overline{1+3g}^2 . b}{2c^2} \int \overline{\text{Cos.} \frac{2bx}{L}}^2 . \frac{2bdx}{L}$

$- \frac{\overline{24g - 72g^2} . b}{2c^4} \int \text{Sen.} \frac{2bx}{L} \text{Cos.} \frac{2bx}{L} . \frac{2bdx}{L}$

$+ \frac{144 g^2 b}{2c^6} \int \overline{\text{Sen.} \frac{2bx}{L}}^4 \overline{\text{Cos.} \frac{2bx}{L}}^2 . \frac{2bdx}{L}$

Il sopra citato canone

$m+n \int \overline{\text{Sen.} \frac{2bx}{L}}^{n-1} \overline{\text{Cos.} \frac{2bx}{L}}^{m+1} . \frac{2bdx}{L} =$

$c \overline{\text{Sen.} \frac{2bx}{L}}^{n} \overline{\text{Cos.} \frac{2bx}{L}}^{m} + mc^2 \int \overline{\text{Sen.} \frac{2bx}{L}}^{n-1} \overline{\text{Cos.} \frac{2bx}{L}}^{m-1} .$

$. \frac{2bdx}{L}$ mi insegna essere, posto $m = n$

$= 1$, $2 \int \overline{\text{Cos.} \frac{2bx}{L}}^2 . \frac{2bdx}{L} = c \,\text{Sen.} \frac{2bx}{L} \text{Cos.} \frac{2bx}{L}$

$+ c^2 \frac{2bx}{L}$, e perciò $\frac{\overline{1+3g}^2 . b}{2c^2} \int \overline{\text{Cos.} \frac{2bx}{L}}^2 . \frac{2bdx}{L}$

$= \frac{\overline{1+3g}^2 . b}{4Lc} \text{Sen.} \frac{2bx}{L} \text{Cos.} \frac{2bx}{L} + \frac{\overline{1+3g}^2 . b}{2L} . \frac{2bx}{L}$

Se nello stesso canone stabilirem $n = 3$, $m = 1$, ci si presenterà

$\int \overline{\text{Sen.} \frac{2bx}{L}}^2 \overline{\text{Cos.} \frac{2bx}{L}}^2 . \frac{2bdx}{L} =$

$\frac{c}{4} \overline{\text{Sen.} \frac{2bx}{L}}^3 \text{Cos.} \frac{2bx}{L} + \frac{c^2}{4} \int \overline{\text{Sen.} \frac{2bx}{L}}^2 . \frac{2bdx}{L}$:

ma per canone $m \int \overline{\text{Sen.} \frac{2bx}{L}}^m . \frac{2bdx}{L} =$

$\overline{m-1} . c^2 \int \overline{\text{Sen.} \frac{2bx}{L}}^{m-2} . \frac{2bdx}{L} - c \overline{\text{Sen.} \frac{2bx}{L}}^{m-1} .$

$. \text{Cos.} \frac{2bx}{L}$, fatto $m = 2$, $\int \overline{\text{Sen.} \frac{2bx}{L}}^2 . \frac{2bdx}{L}$

$= \frac{c^2}{2} \frac{2bx}{L} - \frac{c}{2} \text{Sen.} \frac{2bx}{L} \text{Cos.} \frac{2bx}{L}$; dunque

$\int \overline{\text{Sen.} \frac{2bx}{L}}^2 \overline{\text{Cos.} \frac{2bx}{L}}^2 . \frac{2bdx}{L} =$

$\frac{c}{4} \overline{\text{Sen.} \frac{2bx}{L}}^3 \text{Cos.} \frac{2bx}{L} + \frac{c^4}{8} . \frac{2bx}{L}$

$- \frac{c^3}{8} \text{Sen.} \frac{2bx}{L} \text{Cos.} \frac{2bx}{L}$, e per conseguenza

$- \frac{\overline{24g - 72g^2} . b}{2c^4} \int \overline{\text{Sen.} \frac{2bx}{L}}^2 \overline{\text{Cos.} \frac{2bx}{L}}^2 . \frac{2bdx}{L} =$

$- \frac{\overline{6g - 18g^2} . b}{2c^3} \overline{\text{Sen.} \frac{2bx}{L}}^3 \text{Cos.} \frac{2bx}{L}$

$- \frac{\overline{3g - 9g^2} . b}{L} . \frac{2bx}{L} + \frac{\overline{3g + 9g^2} . b}{2c} \text{Sen.} \frac{2bx}{L} \text{Cos.} \frac{2bx}{L} .$

indica un–

Pel canone primieramente allegato

$$\int \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{4}\ \overline{\text{Cos.}\frac{2bx}{L}}^{2}\ \frac{2bdx}{L} = \frac{c}{6}\ \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{5}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L}$$

$$+ \frac{c^2}{6}\int \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{4}\ \frac{2bdx}{L}$$; ma questa sommatoria pel canone in secondo luogo citato

$$= \frac{3}{4}c^2\int \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{2}\ \frac{2bdx}{L} - \frac{c}{4}\ \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{3}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L},$$

e $$\int \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{2}\ \frac{2bdx}{L} = \frac{c^2 bx}{L} - \frac{c}{2}\ \text{Sen.}\frac{2bx}{L}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L};$$

dunque $$\int \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{4}\ \overline{\text{Cos.}\frac{2bx}{L}}^{2}\ \frac{2bdx}{L} =$$

$$\frac{c}{6}\ \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{5}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L} + \frac{c^6 bx}{4L}$$

$$- \frac{c^5}{16}\ \text{Sen.}\frac{2bx}{L}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L} - \frac{c^3}{24}\ \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{3}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L},$$

e finalmente $$\frac{144\, g^2 b}{L c^6}\int \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{4}\ \overline{\text{Cos.}\frac{2bx}{L}}^{2}\ \frac{2bdx}{L} =$$

$$\frac{24 g^2 b}{L c^5}\ \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{5}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L} + \frac{16 g^2 b^2 x}{L^2}$$

$$- \frac{9 g^2 b}{L c}\ \text{Sen.}\frac{2bx}{L}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L} - \frac{6 g^2 b}{L c^3}\ \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{3}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L}.$$

Sarà pertanto $s = x + \int \frac{dy^2}{2dx} =$

$$x + \overline{1+3g}^{2}\ b\ \text{Sen.}\frac{2bx}{L}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L} + \overline{1+3g}\cdot\frac{b^2 x}{L^2}$$

$$- \overline{6g - 18g^2}\cdot\frac{b^2 x}{L^2} - \frac{\overline{6g - 18g^2}\cdot b}{L c^3}\ \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{3}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L}$$

$$+ \frac{\overline{3g + 9g^2}\cdot b}{L c}\ \text{Sen.}\frac{2bx}{L}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L} + \frac{24 g^2 b}{L c^5}\ \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{5}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L}$$

$$+ 16 g^2\cdot\frac{b^2 x}{L^2} - \frac{9 g^2 b}{L c}\ \text{Sen.}\frac{2bx}{L}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L} - \frac{6 g^2 b}{L c^3}\ \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{3}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L}$$

$$= x + \overline{1+9g^2}\cdot\frac{b^2 x}{L^2} + \frac{\overline{1+12g+9g^2}\cdot b}{2Lc}\ \text{Sen.}\frac{2bx}{L}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L}$$

$$- \frac{\overline{6g - 24g^2}\cdot b}{L c^3}\ \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{3}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L} + \frac{24 g^2 b}{L c^5}\ \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^{5}\ \text{Cos.}\frac{2bx}{L}.$$

Pongasi $x = \frac{1}{2}L$, ed essendo in tal caso $\frac{2bx}{L} = b$, e $\text{Cos.}\frac{2bx}{L} = \text{Cos.}\, b$, troveremo $\beta Z M N = s =$ $\frac{L}{2} + \overline{1+9g^2}\cdot\frac{b^2}{2L}$. Supposti simili i raggi delle due curve semplici componenti, si avrebbe $g = \frac{1}{3}$, ed $s = \frac{1}{2}L + \frac{b^2}{L}$.

Più conseguenze se ne possono dedurre; e primieramente essendo il semiperimetro della curva di un ventre solo $= \frac{1}{2}L + \frac{b^2}{2L}$, chiaramente si scopre, che la nostra curva composta delle due formate di ventri simili cresca sopra $BC = \frac{1}{2}L$ per il doppio di quello cresca la curva semplice di un solo ventre. In secondo luogo egli è facile da provare, che conformata la corda ACB a più curve semplici di uno, di due, di tre ventri &c. colla legge, che i ventri sian simili, queste curve saranno isoperimetre: e vaglia il vero, la curva di un solo ventre si uguaglia ad $L + \frac{b^2}{L}$; dunque un ventre simile della curva dotata del numero n di ventri si uguaglierà ad $\frac{L}{n} + \frac{nb^2}{n^2 L} = \frac{L}{n} + \frac{b^2}{nL}$, e il numero n di ventri n ad $L + \frac{b^2}{L}$, come si doveva dimostrare. In terzo luogo si scopre, che componendo una curva con due curve semplici di ventri simili, la curva composta accresce sopra L per $\frac{2b^2}{L}$, cioè a dire per la somma degli accrescimenti delle curve semplici componenti, qualmente succede nel caso, che abbiamo per le mani. Se la curva si componesse con tre, quattro &c. curve semplici, gli accrescimenti sarebbero tripli, quadrupli &c. paragonati con quello di una curva semplice, supposto

sempre

[illegible] —

sempre che i ventri fossero simili =

Che se i ventri non serbassero similitudine, nulladimeno gli accrescimenti della curva composta sopra $BA = L$ pareggerebbero la somma delle aumentazioni delle curve componenti. Sia per esempio gc la massima ordinata d'una curva di tre ventri, e dovrà essere $3gc$ la massima ordinata della curva corrispondente d'un ventre solo simile ai mentovati; ma la metà di questa curva supera $\frac{1}{2}L$ per $\frac{gg^2 b^2}{2L}$, dunque tale altresì è il semiperimetro della curva di tre ventri, la cui massima ordinata $= gc$. E poichè componendo insieme questa curva e quella di un solo ventre, la cui massima ordinata $= c$, e la semicirconferenza $= \frac{1}{2}L + \frac{b^2}{2L}$, ne nasce la curva BZMNOA, che ha la semiperiferia $BZMN = \frac{1}{2}L + \frac{1+gg^2 \cdot b^2}{2L}$ siccome abbiam dimostrato; si cavi la conseguenza, che l'accrescimento della semicurva composta sopra $BC = \frac{1}{2}L$ si agguaglia all'aggregato degli accrescimenti delle semicurve componenti.

Acciocchè la semicorda BX pareggi la semicurva BZMN, egli è di uopo determinare la saetta CX $= b\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}$, onde si abbia $\sqrt{\frac{1}{4}L^2 + \frac{1+gg^2 \cdot b^2}{2}}$

38

$= \frac{1}{2}L + \frac{\overline{1+gg}^2 \cdot b^2}{2L} = BX = BZMN.$

Tagliata $BH = x$, sarà $HR = \frac{2bx}{L}\sqrt{\frac{\overline{1+gg}^2}{2}}$

Continuando il metodo del primo problema, cerco prima la curva $BTMV$, a cui si adatta la corda nell'istante, nel quale ha compiuta la metà della prima sua vibrazione, o bilanciamento, ed indi la sua rettificazione. Divisa per metà nel punto T l'intercetta RZ fra la retta BX, e la curva $BZMN$, la curva, di cui vado in traccia, passerà pel punto T, ed altri infiniti in simil guisa determinati. Essendo $HR = \frac{2bx}{L}\sqrt{\frac{\overline{1+gg}^2}{2}}$, $HZ = y$, ne proviene $RZ = y - \frac{2bx}{L}\sqrt{\frac{\overline{1+gg}^2}{2}}$, $RT = \frac{1}{2}y - \frac{bx}{L}\sqrt{\frac{\overline{1+gg}^2}{2}}$, e finalmente $HT = \frac{bx}{L}\sqrt{\frac{\overline{1+gg}^2}{2}} + \frac{1}{2}y$.

Pongo $BT = z$, ed ho $dz^2 = dx^2 + \frac{b^2dx^2}{L^2}\cdot\frac{\overline{1+gg}^2}{2} + \frac{b\,dx\,dy}{L}\sqrt{\frac{\overline{1+gg}^2}{2}} + \frac{1}{4}dy^2$, ed estratta la radice, $dz = dx + \frac{b^2dx}{2L^2}\cdot\frac{\overline{1+gg}^2}{2} + \frac{b\,dy}{2L}\sqrt{\frac{\overline{1+gg}^2}{2}} + \frac{\frac{1}{4}dy^2}{2dx}$, ed integrando, $z = x + \frac{b^2x}{2L^2}\cdot\frac{\overline{1+gg}^2}{2} + \frac{by}{2L}\sqrt{\frac{\overline{1+gg}^2}{2}} + \frac{1}{4}\int\frac{dy^2}{2dx}$. Conciossiachè $y = \text{Sen.}\frac{2bx}{L} + g\,\text{Sen.}\frac{6bx}{L}$, e pel calcolo dei seni $\text{Sen.}\frac{6bx}{L} =$ $3\,\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}^2 - \text{Sen.}\frac{2bx}{L}^3$, avremo

c^2

y

seguita

$y = \text{Sen.}\frac{2bx}{l} + \frac{3g}{c^2}\text{Sen.}\frac{2bx}{l}\text{Cos.}\frac{2bx}{l}^2$

$-\frac{3g}{c^2}\text{Sen.}\frac{2bx}{l}^3 = \overline{1+3g}\ \text{Sen.}\frac{2bx}{l}$

$-\frac{4g}{c^2}\text{Sen.}\frac{2bx}{l}^3$: La $\int dx \frac{dy^2}{2dx}$ che non

ha molto determinata. Sarà pertanto

$z = x + \frac{b^2x}{2l}\cdot\frac{1+gg^2}{2} + \frac{b}{2l}\cdot\overline{1+3g}\ \text{Sen.}\frac{2bx}{l}\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}$

$-\frac{2gb}{lc^2}\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\ \text{Sen.}\frac{2bx}{l}^3$ ~~$+\frac{1+3g}{4}\ b\ \text{Sen.}\frac{2bx}{l}\text{Cos.}\frac{2bx}{l}$~~

~~$+\frac{1+3g}{4}\frac{b^2x}{l^2}$~~ $+\frac{1+gg^2}{4}\cdot\frac{b^2x}{l^2}$

$+\frac{\overline{1+12g+9g^2}\ b}{4lc}\text{Sen.}\frac{2bx}{l}\text{Cos.}\frac{2bx}{l}$

$-\frac{\overline{3g-12g}\ b}{2lc^3}\text{Sen.}\frac{2bx}{l}^3\text{Cos.}\frac{2bx}{l}$

$+\frac{6g^2b}{lc^5}\text{Sen.}\frac{2bx}{l}^5\text{Cos.}\frac{2bx}{l} = x$

$+\frac{1+gg^2}{2}\cdot\frac{b^2x}{l^2} + \frac{\overline{1+12g+9g^2}\cdot b}{4lc}\text{Sen.}\frac{2bx}{l}\text{Cos.}\frac{2bx}{l}$

$-\frac{\overline{3g+12g^2}\cdot b}{2lc^3}\text{Sen.}\frac{2bx}{l}^3\text{Cos.}\frac{2bx}{l}$

$+\frac{6g^2b}{lc^5}\text{Sen.}\frac{2bx}{l}^5\text{Cos.}\frac{2bx}{l}$

$+\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{\overline{1+3g}\cdot b}{2l}\text{Sen.}\frac{2bx}{l}$

$-\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{2gb}{lc^2}\cdot\text{Sen.}\frac{2bx}{l}^3$

Posto $x = \frac{1}{2}l$, e per conseguenza $\frac{2bx}{l} = b$, $\text{Sen.}\frac{2bx}{l} = \text{Sen.}\,b = c$, $\text{Cos.}\frac{2bx}{l} = \text{Cos.}\,b = 0$, troveremo

$\beta T M = z = \frac{1}{2}l + \frac{1+gg^2}{2}\cdot\frac{b^2}{2l}$

$+\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{\overline{1-g}\cdot bc}{2l}$, ed impareremo

che la corda $\beta X = \frac{1}{2}l + \frac{1+gg^2}{2l}\cdot b^2$

si è accorciata per la quantità

$\frac{1+gg^2}{4l}\cdot b^2 - \sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{\overline{1-g}\cdot bc}{2l}$, e che

/a

la forza tendente p lo accelerata l'azione $p.\left(\frac{\overline{1+qq}^2 \cdot b^2}{4L} - \sqrt{\frac{1+qq^2}{2}} \cdot \frac{1-a \cdot bc}{2L}\right)$.

Dovendo tutti i punti della corda BX accomodarsi nello stesso momento alla curva BTMV, supponiamo ~~fa di mestieri~~, che la forza accelera~~trice~~ ~~acceleratrice~~ la ragione degli spazj da passarsi, di maniera che si agguaglino ai detti spazj divisi per la costante a, di cui si ricava da stabilire il valore. Una tal legge ricerca, che la forza acceleratrice, la quale nel punto R si agguagliava ad $\frac{RT}{a}$, e si è annullata nel punto T, abbia, qualora il punto R è giunto in T, esercitata l'azione $\frac{\overline{RT}^2}{2a} = \frac{\left(\frac{1}{2}y - \frac{bx}{L}\sqrt{\frac{1+qq^2}{2}}\right)^2}{2a}$

$$= \frac{y^2}{8a} - \frac{bxy}{2aL}\sqrt{\frac{1+qq^2}{2}} + \frac{\overline{1+qq}^2 \cdot b^2x^2}{4aL^2}.$$

Moltiplicata questa grandezza per la massa $\frac{Mdx}{L}$ della particella HK, ne risulta l'azione della forza sollecitante la predetta particola

$$= \frac{My^2dx}{8aL} - \frac{Mbyxdx}{2aL^2}\sqrt{\frac{1+qq^2}{2}}$$

$$+ \frac{\overline{1+qq}^2 \cdot Mb^2x^2dx}{4aL^3},$$ il cui integrale mi somministra, quando $x = \frac{1}{2}L$; l'aggregato di tutte le azioni effettuate in riguardo alle particole

componenti

componenti la media curva BXi, il qual aggregato deve uguagliarsi all'azione $p.\left(\frac{\overline{1+4gg}^2.b^2}{4x} - \sqrt{\frac{1+4gg}{2}}.\frac{\overline{1-g}.bc}{2aL}\right)$ esercitata dalla forza stirante la corda.

Sostituito in cambio di y il suo valore sopra determinato, trovo

$$\frac{My^2dx}{4aL} - \frac{Mby\,xdx}{aL^2}\sqrt{\frac{1+4gg^2}{2}} + \frac{\overline{1+4gg}^2.Mb^2x^2dx}{4aL^3}$$

$$= \frac{\overline{1+3g}^2.M}{16ab}\,\overline{\mathrm{Sen}.\frac{2bx}{L}}^2.\frac{2bdx}{L}$$

$$- \frac{\overline{g-3g}^2.M}{2abc^2}\,\overline{\mathrm{Sen}.\frac{2bx}{2L}}^4.\frac{2bdx}{L}$$

$$+ \frac{g^2M}{abc^4}\,\overline{\mathrm{Sen}.\frac{2bx}{L}}^6.\frac{2bdx}{L}$$

$$- \sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}.\frac{\overline{1+3g}.Mx}{4aL}\,\overline{\mathrm{Sen}.\frac{2bx}{L}}^2.\frac{2bdx}{L}$$

$$+ \sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}.\frac{gMx}{aLc^2}\,\overline{\mathrm{Sen}.\frac{2bx}{L}}^3.\frac{2bdx}{L}$$

$$+ \frac{\overline{1+gg}^2.Mb^2x^2dx}{4aL^3}$$

Integro ordinatamente i termini di questa formula. Ho ritrovato di sopra $\int \overline{\mathrm{Sen}.\frac{2bx}{L}}^2.\frac{2bdx}{L} = \frac{c^2bx}{L} - \frac{c}{2}\,\mathrm{Sen}.\frac{2bx}{L}\,\mathrm{Cos}.\frac{2bx}{L}$, e perciò

$$\frac{\overline{1+3g}^2.M}{16ab}\int \overline{\mathrm{Sen}.\frac{2bx}{L}}^2.\frac{2bdx}{L} = \frac{\overline{1+3g}^2.Mc^2x}{16aL} - \frac{(1+3g)^2.Mc}{32ab}\,\mathrm{Sen}.\frac{2bx}{L}\,\mathrm{Cos}.\frac{2bx}{L}.$$

Dal canone del § 13 del Cap. 10 del Tom. 2. delle citate Istituzioni Analitiche $\int \overline{\mathrm{Sen}.\frac{2bx}{L}}^4.\frac{2bdx}{L} = \frac{3}{4}c^2$

98 $\frac{3}{4}c^2\int \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^2 \cdot \frac{2bdx}{L} - \frac{c}{4}\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^3\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}$

e ponendo in luogo della sommatoria il trovato valore $\int \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^4 \cdot \frac{2bdx}{L}$

$= \frac{3c^4bx}{4L} - \frac{3c^3}{4}\,\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}$

$- \frac{c}{4}\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^3\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}$, e finalmente

$\frac{\overline{+g-3g^2}\cdot M}{2abc^2}\int \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^4 \cdot \frac{2bdx}{L} =$

$-\frac{\overline{3g-9g^2}\cdot Mc^3x}{4aL} + \frac{\overline{3g+9g^2}\cdot Mc\,\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}}{16ab}$

$+\frac{\overline{g+3g^2}\cdot M\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^3\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}}{4abc}$.

Dallo stesso canone imparo

$\int \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^6 \cdot \frac{2bdx}{L} = \frac{5c^2}{6}\int \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^4 \frac{2bdx}{L}$

$-\frac{c}{6}\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^5\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L} = \frac{5c^6bx}{8L}$

$-\frac{5c^5}{16}\,\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L} - \frac{5c^3}{24}\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^3\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}$

$-\frac{c}{6}\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^5\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}$, e quindi

$\frac{g^2M}{abc^4}\int \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^6 \cdot \frac{2bdx}{L} = \frac{5g^2Mc^2x}{2aL}$

$-\frac{5g^2Mc\,\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}}{16ab}$

$-\frac{5g^2M\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^3\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}}{24abc}$

$-\frac{g^2M\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^5\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}}{6abc^3}$.

Il quarto termine lo dispongo così $-\sqrt{\frac{1+9g^2}{2}}\cdot\frac{\overline{1+3g}\cdot Mx}{4aL}\,\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2bdx}{L} =$

$-\frac{\sqrt{\frac{1+9g^2}{2}}\cdot\overline{1+3g}\cdot M}{4ab}\,\frac{2bx}{L}\,\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2bdx}{L}$

$-\frac{\sqrt{\frac{1+9g^2}{2}}\cdot\overline{1+3g}\cdot M}{4ab}\,\frac{2bdx}{L}\int\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2bdx}{L}$

+

[illegible] —

$$+\frac{\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}\cdot\overline{1+3g}\cdot M\cdot\frac{2bdx}{L}\int \mathrm{Sen}\cdot\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2bdx}{L}}{8ab},$$

ed integrando

$$\int -\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}\cdot\frac{\overline{1+3g}\cdot Mx\ \mathrm{Sen}\cdot\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2bdx}{L}}{4aL} =$$

$$-\frac{\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}\cdot\overline{1+3g}\cdot M\cdot\frac{2bx}{L}\int \mathrm{Sen}\cdot\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2bdx}{L}}{4ab}$$

$$+\frac{\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}\cdot\overline{1+3g}\cdot M\int\frac{2bdx}{L}\int \mathrm{Sen}\cdot\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2bdx}{L}}{4ab}\cdot$$

ma $\int \mathrm{Sen}\cdot\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2bdx}{L} = -c\ \mathrm{Cos}\cdot\frac{2bx}{L}$;

dunque $\int -\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}\cdot\frac{\overline{1+3g}\cdot Mx\ \mathrm{Sen}\cdot\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2bdx}{L}}{4aL}$

$$=\frac{\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}\cdot\overline{1+3g}\cdot Mcx\ \mathrm{Cos}\cdot\frac{2bx}{L}}{4aL}$$

$$-\frac{\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}\cdot\overline{1+3g}\cdot Mc\int \mathrm{Cos}\cdot\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2bdx}{L}}{4ab} =$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}\cdot\overline{1+3g}\cdot Mcx\ \mathrm{Cos}\cdot\frac{2bx}{L}}{}$$

$$-\frac{\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}\cdot\overline{1+3g}\cdot Mc^2\ \mathrm{Sen}\cdot\frac{2bx}{L}}{4ab}$$

Passo al quarto termine

$$\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}\cdot\frac{gMx\ \mathrm{Sen}\cdot\frac{2bx}{L}^3\cdot\frac{2bdx}{L}}{aLc^2} =$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}\cdot gM\cdot\frac{2bx}{L}\ \mathrm{Sen}\cdot\frac{2bx}{L}^3\cdot\frac{2bdx}{L}}{2abc^2}$$

$$+\frac{\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}\cdot gM\cdot\frac{2bdx}{L}\int \mathrm{Sen}\cdot\frac{2bx}{L}^3\cdot\frac{2bdx}{L}}{2abc^2}$$

$$-\frac{\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}\cdot gM\cdot\frac{2bdx}{L}\int \mathrm{Sen}\cdot\frac{2bx}{L}^3\cdot\frac{2bdx}{L}}{2abc^2}$$

essendo pel solito canone

$$\int \mathrm{Sen}\cdot\frac{2bx}{L}^3\cdot\frac{2bdx}{L} = \frac{2c^2}{3}\int \mathrm{Sen}\cdot\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2bdx}{L}$$

48

$= -\frac{c}{3}\,\text{Sen.}\,\frac{2bx}{L}^2\,\text{Cos.}\,\frac{2bx}{L} = -\frac{2c}{3}\,\text{Cos.}\,\frac{2bx}{L}$

$-\frac{c}{3}\,\text{Sen.}\,\frac{2bx}{L}^2\,\text{Cos.}\,\frac{2bx}{L}$, avremo

$\int\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{gMx}{aLc^2}\,\text{Sen.}\,\frac{2bx}{L}^3\cdot\frac{2b\,dx}{L} =$

$+\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{2gMcx\cdot\text{Cos.}\,\frac{2bx}{L}}{3aL}$

$-\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{gMx\,\text{Sen.}\,\frac{2bx}{L}^2\,\text{Cos.}\,\frac{2bx}{L}}{3aLc}$

$+\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{gMc}{3ab}\int\text{Cos.}\,\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2b\,dx}{L}$

$+\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{gM}{6abc}\int\text{Sen.}\,\frac{2bx}{L}^2\cdot\text{Cos.}\,\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2b\,dx}{L}$.

Ma $\int\text{Cos.}\,\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2b\,dx}{L} = c\,\text{Sen.}\,\frac{2bx}{L}$, e pel sopra allegato canone dal § 31. del Cap. 10. del Tomo 2. delle Istituzioni Analitiche $\int\text{Sen.}\,\frac{2bx}{L}^2\cdot\text{Cos.}\,\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2b\,dx}{L} = \frac{c}{3}\,\text{Sen.}\,\frac{2bx}{L}^3$;

dunque $\int\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{gMx}{aLc^2}\,\text{Sen.}\,\frac{2bx}{L}^3\cdot\frac{2b\,dx}{L} =$

$-\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{2gMcx\cdot\text{Cos.}\,\frac{2bx}{L}}{3aL}$

$-\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{gMx\,\text{Sen.}\,\frac{2bx}{L}^2\,\text{Cos.}\,\frac{2bx}{L}}{3aLc}$

$+\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{gMc^2\,\text{Sen.}\,\frac{2bx}{L}}{3ab}$

$+\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{gM\,\text{Sen.}\,\frac{2bx}{L}^3}{18ab}$.

Il sesto termine ha per integrale

$\int\frac{1+gg^2}{2}\cdot\frac{Mb^2x^2dx}{4aL^3} = \frac{1+gg^2}{2}\cdot\frac{Mb^2x^3}{12aL^3}$.

Raccogliendo

Raccogliendo in una somma i sei termini integrati, senz'aggiungervi costante, perchè essa somma esattamente si annulla, quando $x=0$, troveremo

$$\int \frac{My^2dx}{6aL} - \sqrt{\overline{1+gg}^2}\cdot\frac{Mbyxdx}{2aL^2} + \overline{1+gg}^2\cdot\frac{Mb^2x^2dx}{4aL^3} =$$

$$\frac{\overline{1+31g^2}\cdot Mc^2x}{16aL} + \frac{\overline{1+gg}^2\cdot Mb^2x^3}{12aL^3}$$

$$-\sqrt{\overline{1+gg}^2}\cdot\frac{\overline{3+g}\cdot Mc^2}{24ab}\,Sen.\,\frac{2bx}{L}$$

$$+\sqrt{\overline{1+gg}^2}\cdot\frac{gM}{18ab}\,c^3\,\overline{Sen.\,\frac{2bx}{L}}^3$$

$$+\sqrt{\overline{1+gg}^2}\cdot\frac{\overline{3+g}\cdot Mcx}{12aL}\,Cos.\,\frac{2bx}{L}$$

$$+\frac{\overline{1-g}^2\cdot Mc}{32ab}\cdot Sen.\,\frac{2bx}{L}\,Cos.\,\frac{2bx}{L}$$

$$-\sqrt{\overline{1+gg}^2}\cdot\frac{gMx}{3aL}\,\overline{Sen.\,\frac{2bx}{L}}^2\cdot Cos.\,\frac{2bx}{L}$$

$$+\frac{3g+4g^2\cdot M}{24abc}\,Sen.\,\frac{2bx}{L}\,Cos.\,\frac{2bx}{L}$$

$$-\frac{g^2M}{6abc^3}\,Sen.\,\frac{2bx}{L}\cdot Cos.\,\frac{2bx}{L}$$

Fatto $x=\frac{1}{2}L$, dimodochè sia $Sen.\,\frac{2bx}{L} = Sen.\,b = 1$, $Cos.\,\frac{2bx}{L} = Cos.\,b = 0$, ci si presenterà l'aggregato dalle azioni delle forze, che si suppongono applicate alla semicirconferenza $BX = \frac{\overline{1+31g^2}\cdot Mc^2}{32a}$

$$+\frac{\overline{1+gg}^2\cdot Mb^2}{96a} - \sqrt{\overline{1+gg}^2}\cdot\frac{\overline{9+g}\cdot Mc^3}{72ab},$$

il quale esser deve uguale all'azione

$$P.\,\frac{\overline{1+gg}^2\cdot b^2 - \sqrt{\overline{1+gg}^2}\cdot 2+2g\cdot bc}{4L}$$

dalla

38

della forza tendente, onde ne risulti

$$\frac{1+31g^2 \cdot Mc^2}{32a} + \frac{1+9g^2 \cdot Mb^2}{9 \cdot 64a} - \sqrt{\frac{1+9g^2}{2}} \cdot \frac{9-g \cdot Mc^3}{72ab}$$

$$= p \cdot \frac{1+9g^2 \cdot b^2 - \sqrt{\frac{1+9g^2}{2}} \cdot 2-2g \cdot bc}{4L}, \text{ o sia}$$

$$\frac{1+31g^2 \cdot 9Mbc^2 + 3+27g^2 \cdot Mb^3 - \sqrt{\frac{1+9g^2}{2}} \cdot 3 \cdot 64g \cdot Mc^3}{4 \cdot 72ab}$$

$$= p \cdot \frac{1+9g^2 \cdot b^2 - \sqrt{\frac{1+9g^2}{2}} \cdot 2-2g \cdot bc}{72aL},$$

e perciò $a =$

$$\frac{1+31g^2 \cdot 9LMbc^2 + 3+27g^2 \cdot LMb^3 - \sqrt{\frac{1+9g^2}{2}} \cdot 3 \cdot 64g \cdot LMc^3}{72p\left(1+9g^2 \cdot b^3 - \sqrt{\frac{1+9g^2}{2}} \cdot 2-2g \cdot b^2c\right)} =$$

$$\frac{LMc^2}{4pb^2} \cdot \frac{\left(9+279g^2 \cdot bc^2 + 3+27g^2 \cdot b^3 - \sqrt{\frac{1+9g^2}{2}} \cdot 3 \cdot 64g \cdot c^3\right)}{18+162g^2 \cdot bc^2 - \sqrt{\frac{1+9g^2}{2}} \cdot 36-36g \cdot c^3}$$

Esige il tempo, in cui si trova la corda, la distanza $a = \frac{LMc^2}{4pb^2}$, e quindi dovrà essere $9+279g^2 \cdot bc^2 + 3+27g^2 \cdot b^3 - \sqrt{\frac{1+9g^2}{2}} \cdot 3 \cdot 64g \cdot c^3 = 18+162g^2 \cdot bc^2 - \sqrt{\frac{1+9g^2}{2}} \cdot 36-36g \cdot c^3$, e per conseguenza $3b^3 + 27g^2b^3 - 9bc^2 + 117g^2bc^2 + \sqrt{\frac{1+9g^2}{2}} \cdot 32gc^3 = 0$. Essendo $c = b \cdot \frac{226}{355}$, la nostra formula si può esprimer così: $3b^3 + 27g^2b^3 - 9bc^2 + 117g^2bc^2 + \sqrt{\frac{1+9g^2}{2}} \cdot 32gbc^2 \cdot \frac{226}{355} = 0$. Divisa per b, ed in cambio di b^2 si metta il suo valore $c^2\left(\frac{355}{226}\right)^2$, ne nascerà, fatta la divisione per c^2, $3\left(\frac{355}{226}\right)^2 + 27g^2\left(\frac{355}{226}\right)^2 - 9 + 117g^2 + \sqrt{\frac{1+9g^2}{2}} \cdot 32g \cdot \frac{226}{355} = 0$.

Ho

Ho nel pratico problema stabilito
$\left(\frac{3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 6\cdot 7}\right)^2 = 0,4902\ldots,\ \frac{2\cdot 2\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 5} = 0$
$0,653\ 666^2$, e pertanto ridotto il
computo troveremo $-1,5974$
$+143,6194 \cdot g^2 + \sqrt{\frac{1+9g}{2}} \cdot 20,3712 \cdot g = 0$

Pongo $g = \frac{1}{16}$, e trovo $-1,5974$
$+\frac{143,6194}{256} + \sqrt{\frac{265}{512}} \cdot \frac{20,3712}{16}$
$= 0$. Ora $\sqrt{\frac{265}{512}} = \sqrt{0,5175781\,2}$
$= 0,7194$, e per conseguenza
effettuate le operazioni, si giunge
alla espressione ...,
che mi dimostra accostarsi molto
al vero l'ipotesi $g = \frac{1}{16}$
Per ottenere una più esatta
... pongo $g = \frac{1}{16} - p$, ed essendo
p grandezza assai piccola si può
trascurare il quadrato, di modo
che sia $g^2 = \frac{1}{256} - \frac{p}{8}$, e $\sqrt{\frac{1+9g}{2}}$
$= \sqrt{\frac{265}{512} - \frac{9p}{2}} = \sqrt{\frac{265}{512}} - \frac{9p}{4\sqrt{\frac{265}{512}}}$

Ne nascerà pertanto la formula
$-1,5974 + \frac{143,6194}{256}$
$- \frac{143,6194 \cdot p}{8}$ ... $\cdot 20,3712 \left(\frac{1}{16} - p\right)$
$+ 0,7194 - \frac{9p}{4 \cdot 0,7194}$
$= 0$, da cui si deduce $0,0353$
$= \frac{143,6194 \cdot p}{8} + 0,7194 \cdot p \cdot 20,3712$
$+ \frac{20,3712 \cdot 9p}{4 \cdot 0,7194 \cdot 16} =$ ~~...~~ $38,1057 \cdot p$,
e quindi $p = \frac{0,0353}{38,1057} = 0,0009$.

38

tutta la inflessione dovesse essere $\frac{1}{16}$ = 0,0625, troveremo $y = \left(\frac{1}{16} - p\right)$ = 0,0016 vale a dire una minima minore di $\frac{1}{101}$.

Acciocchè adunque la prima vibrazione si effettuasse nel detto tempo sarebbe necessario che la corda si accomodasse ad una curva composta dalle due di un ventre solo e di tre ventri, salve le due condizioni, che le massime ordinate delle curve componenti si riferissero in ragione di 1 : 0,0625 e che nella curva di tre ventri le ordinate dei ventri estremi fossero positive non meno che quella della curva di un ventre solo.

Se nella curva di tre ventri le ordinate dei ventri estremi fossero negative, ci si presenterebbe la formula $-1,5974$ $+ 143,6894\, y^2$ $- \sqrt{\frac{1+99y^2}{2}} \cdot 20,3712 \cdot y = 0$

Ponendo $y = \frac{1}{7}$, troveremo $-1,5974 + \frac{143,6894}{49}$ $- \sqrt{\frac{2,49}{49}} \cdot \frac{20,3712}{7} = 0 =$ $-1,5974 + 3,7243$ $- 0,7093 \cdot \frac{20,3712}{7} =$ $-3,6366 + 3,7243 = -0,0893$.

Si ... ...
$\frac{1}{7}$ ... minore
da ... ... quale cosa
si faccia $z = \frac{1}{7} + p$; $z^2 = \frac{1}{49} + \frac{2p}{7}$,

$$\sqrt{1+99} = \sqrt{\frac{29}{49} + \frac{9p}{...}} = \sqrt{\frac{29}{49}} + \frac{9p}{14\sqrt{\frac{29}{49}}}$$

onde ... presentata la formola
...
...

$$+20,3 \ldots \tfrac{1}{7} + p \cdot \left(\sqrt{\frac{29}{49}} + \frac{9p}{14\sqrt{\frac{29}{49}}}\right)$$

$= 0$, che mi dà $0,0 \ldots =$
$\ldots \sqrt{\frac{29}{49}} + \frac{2p}{7} \cdot 143,67\ldots$,
$\ldots 9p$
$\overline{\ldots \sqrt{\frac{29}{49}}}$
e ponendo in vece di $\sqrt{\frac{29}{49}}$ il
suo valore, $0,0\ldots = \frac{20,3\ldots \cdot 9p}{9\ldots}$

$\ldots$
$\frac{2p}{2} \cdot 143,67 \ldots$
$\ldots$ onde si avrebbe
$= \ldots$, $= 0,00\ldots$
$p = \frac{\ldots}{\ldots}$ Dunque
... $\frac{1}{70} = 0,14$
$z = \frac{1}{7} + p = 0,14\ldots$ Il Sig.^r Conte rifletté
... della corda
... col suono ... quelle
intere fosse soltanto ... resterebbe an-
dalla terza parti, ... dalle due curve
bisogno ... quale ... da una determinata
composta ... dovesse ... la ... di modo che

38 + Nella Lettera IV. farò una riflessione atta a levare la detta ambiguità.

di modo che g fosse piuttosto eguale a 0,506114, che a −0,31441, o al contrario. +
Più incertezza ne nascerebbe, se le curve componenti fossero, non di uno, di tre, di cinque ventri, onde ne risultasse la equazione della curva composta
$y = \text{Sen.}\frac{2bx}{L} \pm g\,\text{Sen.}\frac{6bx}{L} \pm g'\,\text{Sen.}\frac{10bx}{L}$.
Poste $g = 0,506114$, ovvero $-g = 0,31441$, si determinerebbe $g' = a\,g$ e, cangiati i valori di $\pm g$, resterebbero stabiliti i valori corrispondenti di $\pm g'$. Ora quale coppia di grandezza relativa di g, g' verrebbe prescelta dalla Natura per mantenere illesa la misura del tempo della prima vibrazione? L'esperienza frattanto ci manifesta, che applicata la penna al punto medio X della corda, col suono della corda intera sono incorporati quelli delle sue parti aliquote dispari, e che per conseguenza la curva composta vien espressa dall'equazione $y = \text{Sen.}\frac{2bx}{L} \pm g\,\text{Sen.}\frac{6bx}{L} \pm g'\,\text{Sen.}\frac{10bx}{L} \pm g''\,\text{Sen.}\frac{14bx}{L} \pm g'''\,\text{Sen.}\frac{18bx}{L}$ &c.
A tale curva dunque certamente, e necessariamente dee adattarsi la corda; ma chi mi guida a determinare

determinare i veri valori di g, g', g'' e g''' convenienti al moto, che meccanicamente si effettua?

Nel primo istante del moto il solo punto X è spinto per la direzione X C da una forza eguale, e contraria a quella, che teneva la corda nella positura A X B. Qualunque altro punto R è privo di forza, che lo solleciti per R H. Lasciata la corda in libertà, ben tosto si incurva, ed ogni suo punto acquista forza, la quale per altro, sintantochè la corda non è ancor pervenuta alla curva bilanciata, non altera soltanto la velocità della particola, a cui è applicata, seguendo fra le diverse particole una continua comunicazione di moto. I due principj delle forze variabili sollecitanti le particole, e della comunicazione del moto debbono scortarci alla soluzion del problema, il qual è ben degno degli sforzi dei più sublimi Geometri. I loro metodi, ed i loro calcoli saranno giusti, quando li condurranno nel caso semplice, che abbiam per le mani, alla formola $y = \text{Sen.}\frac{2bx}{L} \pm g\,\text{Sen.}\frac{6bx}{L} \pm g'\,\text{Sen.}\frac{10bx}{L} \pm g''\,\text{Sen.}\frac{14bx}{L}$

$\pm$

38

± q.''' Sono $\frac{6x}{2}$ dec., ed essi sanno
altro esser quadrata la metà a
ciò con molta fatica, e gloriandog-
giono pervenire

[illegible]

VI

Lettera al Sig.r Conte Girolamo Ferrardi
in cui si continua a versare
sull'argomento della lettera
precedente
nel Giornale di Modena Tomo XVII.
pag. 292

Lettera IV.

Del Sig.r Co. Giordano Riccati al Sig.r Co. Girolamo Zanardi; in cui si continua a versare sulle argomento della Lettera precedente.

Ho sostenuto nella mia prima terza Lettera, che la corda BXA (Fig. 3.) nell'ultimo istante della prima vibrazione si conforma prossimamente ad una curva bilanciata posta al di sotto, che al di sopra dell'asse AB; ed alla presentemente, Nobilissimo Sig.r Conte, mi richiede le conseguenze, che ne nascerebbero, se si adattasse alla curva AZNOA.

Tirata RZ normale ad AB, e divisala per metà nel punto T, e quella, ed altre infinite similmente determinati appartenenti alla curva, in cui si trova piegata la nostra corda, giunta che sia alla metà della prima sua vibrazione. Posto che AZNOA sia una curva composta dalle due semplici di un ventre solo, e di tre ventri, le cui massime ordinate CX, ha determinato nella Lettera III. CX $= b\sqrt{\frac{1+qq}{r}}$, e $RZ = \frac{2bx}{L}\sqrt{\frac{1+qq}{r}}$,

$BX = BZN = \frac{LL}{\pi\pi} + \frac{1+qq}{LL} \cdot bb$.

Stabilita l'ordinata $HZ = y$, sarà $RZ = \frac{2bx}{L}\sqrt{\frac{1+qq}{r}} + y$, RT

=

$= \frac{bx}{c}\sqrt{\overline{1+gg}^2} + \frac{1}{2}y$, $HT = RT - RH$
$= \frac{1}{2}y - \frac{bx}{c}\sqrt{\overline{1+gg}^2}$.

Posto $RT = z$, ed ho $dz^2 = dx^2 + \frac{b^2dx^2}{c^2}\cdot\overline{1+gg}^2 - \frac{b\,dx\,dy}{c}\sqrt{\overline{1+gg}^2} + \frac{dy^2}{4}$, ed estratta la radice

$dz = dx + \frac{b^2dx}{2c^2}\cdot\overline{1+gg}^2 - \frac{b\,dy}{2c}\sqrt{\overline{1+gg}^2} + \frac{1}{4}\frac{dy^2}{2dx}$, ed integrando, $z =$

$x + \frac{b^2x}{2c^2}\cdot\overline{1+gg}^2 - \frac{by}{2c}\sqrt{\overline{1+gg}^2} + \frac{1}{4}\int\frac{dy^2}{2dx}$. Nella citata Lettera ho scoperto $y = \overline{1+3g}\cdot\text{Sen.}\frac{2bx}{c} - \frac{4g}{c^2}\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{c}}^3$, ed $\frac{1}{4}\int\frac{dy^2}{2dx} =$

$\frac{\overline{1+gg}^2}{4}\cdot\frac{b^2x}{c^2} + \frac{\overline{1+2g+gg}^2\cdot b}{8c}\,\text{Sen.}\frac{2bx}{c}\,\text{Cos.}\frac{2bx}{c}$

$- \frac{\overline{3g-2g}^2\cdot b}{2c^3}\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{c}}^3\,\text{Cos.}\frac{2bx}{c}$

$+ \frac{6g^2b}{c^5}\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{c}}^5\,\text{Cos.}\frac{2bx}{c}$. Sostituiti tutti questi valori, troveremo

$z = x + \frac{\overline{1+gg}^2}{2}\frac{b^2x}{c^2}$

$- \sqrt{\overline{1+gg}^2}\cdot\frac{b-3gb}{2c}\,\text{Sen.}\frac{2bx}{c}$

$+ \sqrt{\overline{1+gg}^2}\cdot\frac{2gb}{c^2}\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{c}}^3$

$+ \frac{\overline{1+2g+gg}^2\cdot b}{4c}\,\text{Sen.}\frac{2bx}{c}\,\text{Cos.}\frac{2bx}{c}$

$- \frac{\overline{3g-2g}^2\cdot b}{2c^3}\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{c}}^3\,\text{Cos.}\frac{2bx}{c}$

$+ \frac{6g^2b}{c^5}\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{c}}^5\,\text{Cos.}\frac{2bx}{c}$

Quindi $x = \frac{1}{2}c$ e per conseguenza

$\frac{2bx}{c}$

$\frac{2bx}{L} = b$, $Sen.\frac{2bx}{L} = Sen. b = c$,
$Cos.\frac{2bx}{L} = Cos. b = 0$, scopriremo
$BTMV = z = \frac{1}{2}L + \frac{1+qg^2}{2}.\frac{b^2}{2L} + \sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}.\frac{1-2g.bc}{2L}$, ed impareremo,
che la corda $BX = \frac{1}{2}L + \frac{1+qg^2}{2L}.b^2$
si è accorciata per la quantità
$\frac{1+qg^2.b^2}{4L} + \sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}.\frac{1-2g.bc}{2L}$, e che
la forza tendente P ha esercitata
l'azione $P.\left(\frac{1+qg^2.b^2}{4L} + \sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}.\frac{1-2g.bc}{2L}\right)$

Ho già provato, che la forza acceleratrice del punto R giunto in T, la quale sia proporzionale alla distanza dal punto T, ha esercitata l'azione $\frac{RT^2}{2a} = \frac{\frac{1}{2}y + \frac{bx}{L}\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}}}{2a}^2 = \frac{y^2}{4a} + \frac{bxg}{2aL}\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}} + \frac{1+qg^2.b^2x^2}{4aL^2}$. Moltiplicata questa grandezza per la massa $\frac{Mdx}{L}$ della particola HK, ne risulta l'azione della forza sollecitante la predetta particola $= \frac{My^2dx}{4aL} + \frac{Mbyxdx}{2aL^2}\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}} + \frac{1+qg^2.Mb^2x^2dx}{4aL^3}$.

Sostituito in luogo di y il suo valore sopra determinato, trovo
$\int\frac{My^2dx}{4aL} + \frac{Mbyxdx}{2aL^2}\sqrt{\frac{1+qg^2}{2}} + \frac{1+qg^2Mb^2x^2dx}{4aL^3}$
$= \frac{1+3g^2}{16bb}.M\int Sen.\frac{2bx}{L}.\frac{2bdx}{L}$
$- \frac{g+3g^3}{2abb}.M\int Sen.\frac{2bx}{L}.\frac{2bdx}{L}$

$$+\frac{g^2 M}{abc^2}\int \overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^2 \cdot \frac{2b\,dx}{L}$$

$$+\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{\overline{1+3g}\cdot M}{4aL}\int x\,\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\cdot\frac{2b\,dx}{L}$$

$$-\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{gM}{aLc^2}\int x\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^3\cdot\frac{2b\,dx}{L}$$

$$+\frac{\overline{1+gg^2}\cdot Mb^2}{4aL^3}\int x^2\,dx\Big) =$$

$$\frac{\overline{1+31g^2}\cdot Mc^2x}{16aL}+\frac{\overline{1+gg^2}\cdot Mb^2x^3}{12aL^3}$$

$$+\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{\overline{3+g}\cdot Mc^2}{24ab}\,\text{Sen.}\frac{2bx}{L}$$

$$-\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{gM}{14ab}\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^3$$

$$-\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{\overline{3+g}\cdot Mcx}{12aL}\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}$$

$$+\frac{\overline{1-g^2}\cdot Mc}{32ab}\,\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}$$

$$+\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}\cdot\frac{gMx}{3aL}\,\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}$$

$$+\frac{\overline{3g+4g^2}\cdot M}{24abc}\,\overline{\text{Sen.}\frac{2bx}{L}}^3\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L}$$

$$-\frac{g^2M}{6abc^3}\,\text{Sen.}\frac{2bx}{L}\,\text{Cos.}\frac{2bx}{L},$$ formola,

che si deduce dal raccogliere in una somma i valori delle sovrascritte sommatorie determinati nella Lettera III.

Posto $x=\frac{1}{2}L$; dimodochè sia $\text{Sen.}\frac{2bx}{L}=\text{Sen.}\,b=c$, $\text{Cos.}\frac{2bx}{L}=\text{Cos.}\,b=a$, ci si presenterà l'aggregato delle azioni delle forze, che si suppongono applicate alla semicorda $BX=\frac{\overline{1+31g^2}\cdot Mc^2}{32a}$ $+\frac{\overline{1+gg^2}\cdot Mb^2}{96a}+\frac{\overline{9-g}\cdot Mc^3}{32ab}\sqrt{\frac{1+gg^2}{2}}$; il

quale

essere dee uguale all'azione

$p \cdot \overline{1+qq}^2 \cdot b^2 + \sqrt{\frac{1+qq}{2}} \cdot \overline{1-7q} \cdot 2bc$

della forza tendente, onde ne risulti $\frac{\overline{1+31q}^2 \cdot Mc^2}{6a} + \frac{\overline{1+qq}^2 \cdot Mb^2}{24a}$

$+\sqrt{\frac{1+qq}{2}} \cdot \frac{\overline{q-q} \cdot Mc^3}{24ab} =$

$p \cdot \frac{\overline{1+qq}^2 \cdot b^2 + \sqrt{\frac{1+qq}{2}} \cdot \overline{1-7q} \cdot 2bc}{L}$, osia

$\frac{\overline{1+31q}^2 \cdot 9Mbc^2 + \overline{1+qq}^2 \cdot 3Mb^3 + \sqrt{\frac{1+qq}{2}} \cdot \overline{q-q} \cdot 4Mc^3}{72ab}$

$= p \cdot \overline{1+qq}^2 \cdot b^2 + \sqrt{\frac{1+qq}{2}} \cdot \overline{1-7q} \cdot 2bc$

e perciò avrà

$\frac{LMc^2}{4pb^2} = \frac{\overline{q+27qq}^2 \cdot bc^2 + \overline{3+27q} \cdot b^3 + \sqrt{\frac{1+qq}{2}} \cdot \overline{3b-4q} \cdot c^3}{\overline{16+16q}^2 \cdot bc^2 + \sqrt{\frac{1+qq}{2}} \cdot \overline{3b-25q} \cdot c^3}$

Il tempo, in cui si vibra la corda, richiede la costante, e quindi dovrà essere $\frac{LMc^2}{4pb^2}$,

$\frac{\overline{q+27qq}^2 \cdot bc^2 + \overline{3+27q}^2 \cdot b^3 + \sqrt{\frac{1+qq}{2}} \cdot \overline{3b-4q} \cdot c^3}{= \overline{16+16q}^2 \cdot bc^2 + \sqrt{\frac{1+qq}{2}} \cdot \overline{3b-25q} \cdot c^3}$,

e per conseguenza $3b^3 + 27q^2b^3$

$-9bc^2 + 117qbc^2 - \sqrt{\frac{1+qq}{2}} \cdot 24qc^3 = 0$

Essendo $c = b \cdot \frac{22b}{355}$, la nostra formula si può esprimer così

$3b^3 + 27q^2b^3 - 9bc^2 + 117q^2bc^2$

$- \sqrt{\frac{1+qq}{2}} \cdot 24qbc^2 \cdot \frac{22b}{355} = 0$.

Si divida per b, ed in luogo di

b^2

b^2 si collochi il suo valore $x^2\left(\frac{355}{226}\right)^2$, e fatta la divisione per x^2 ne risultava $3\left(\frac{355}{226}\right)^2 + 27 g^2\left(\frac{355}{226}\right)^2 - 9 + 117 g^2 - \sqrt{\frac{1+gg}{2}}\cdot 24{,}46\, g\cdot\frac{226}{355} = 0.$ Mi insegna il primo problema essere $\left(\frac{355}{226}\right)^2 = 2{,}4674$, $\frac{226}{355} = 0{,}6366$, e quindi effettuate le convenienti operazioni scoprirassi $-1{,}5978 + 183{,}6194\, g^2 - \sqrt{\frac{1+gg}{2}}\cdot 15{,}5764\cdot g = 0$ —

Questa formola non potrebbe mai annullarsi quando $g=0$. In tale ipotesi si troverebbe $a^2 = \frac{LMc^2}{4pb^2}\cdot\frac{9+3\left(\frac{355}{226}\right)^2+\sqrt{2}\cdot 144\cdot\frac{226}{355}}{18+\sqrt{2}\cdot 144\cdot\frac{226}{355}} = \frac{LMc^2}{4pb^2}\cdot\frac{30{,}6022}{34{,}2050}$, cioè a dire minore di $\frac{LMc^2}{4pb^2}$, e per conseguenza il tempo della prima vibrazione contro ciò che vi chiede la natura della corda, sarebbe minore di $\frac{c}{2b}\sqrt{\frac{LM}{hp}}$. Non è dunque possibile, che la corda AXB si accomodi alla curva di un solo ventre ACNZB.

Non può nemmeno annullarsi la predetta formola, qualora g è positiva, e quindi egli è di uopo che g sia negativa, onde si abbia

$-1,5974 + 143,6194\, g^2$
$+ \sqrt{\frac{1+gg}{2}}^3 \cdot 157,6764 \cdot g = 0$.
Pongo $g = \frac{1}{71}$, e trovo
$143,6194\, g^2 = 0,0284$;
$\sqrt{\frac{1+gg}{2}}^3 = \sqrt{\frac{2523}{5041}}^3 = 0,7077$,
e $\sqrt{\frac{1+gg}{2}}^3 \cdot 157,6764 \cdot g = 1,5737$,
e finalmente $-1,5974 + 143,6194\, g^2$
$+ \sqrt{\frac{1+gg}{2}}^3 \cdot 157,6764 \cdot g = 0,0123$.
Il vero valore di questa g è mezzo
fra $\frac{1}{71} = 0,01408\frac{62}{71}$, ed $\frac{1}{72} =$
$0,01388\frac{84}{72}$; facciasi $g = 0,0140$
onde si abbia $g^2 = 0,00019600$,
$\frac{1+gg}{2} = 0,50009800$, $\sqrt{\frac{1+gg}{2}}^3 =$
$0,70077$. Sostituiti questi valori
troveremo $-1,5974 + 143,6194\, g^2$
$+ \sqrt{\frac{1+gg}{2}}^3 \cdot 157,6764 \cdot g = 0,0009$
quantità fisicamente nulla.

Supposto che il bilanciamento seguisse come nella fig.ª, il suono delle terze parti della corda non sarebbe sensibile. Ho dimostrato nella mia Opera Della Corda, ovvero Fibra elastica Schediasma VI. che i suoni d'una corda riescono del pari forti, quando vibrandosi concepisca in siti analoghi eguali forza viva. Il perché i suoni delle tre terze parti farebbero nell'orecchio tanta impressione, quanta quello della corda intera, se fosse

422

$g = \frac{1}{3}$, come può agevolmente pro-
varsi: Posta la massima ordina-
ta $\frac{1}{3}c$, $\frac{1}{72}c$, che stanno come $1 : \frac{1}{24}$,
le velocità analoghe si riferirebbe-
ro come 24 : 1, ed i loro quadrati
come 576 : 1, e tale sarebbe la
proporzione della forza viva del-
la corda, che oscilla divisa in tre
parti nelle due ipotesi di $g = \frac{1}{3}$,
di $g = \frac{1}{72}$: ma la corda nella prima
circostanza rende un suono tanto
vigoroso, quanto quello della corda
intera, la cui massima ordinata
$= c$; dunque il suono della corda
tripartita nella seconda circostanza
avrebbe $\frac{1}{576}$ di forza paragonato
con quello della predetta corda in-
tera; e per conseguenza non farebbe
impressione sensibile nell'udito.
Si inferisca dallo stimat.mo Sig.r
Conte, che se dalla stessa parte,
come nella fig.a 4., la corda si
accomodasse ad una curva più
composta, tanto meno diverreb-
bero sensibili i suoni delle
parti 5.te, 7.me, 9.ne &c.: ma questi
suoni chiaramente si manifestano
al senso, specialmente quando si
separano colla opportuna applica-
zione della molla da me descrit-
ta nello Schediasma IV. dell'

Opera

Opera mentovata; dunque il bozzo incavato sarà come nella fig. 3. ; anche per le ... 12

Se col suono della contrariante fosse soltanto incompatibile quello della terra parte, fra le due curve composte espresse dalla fig.re 2.da e 3.za; sarebbe questa preferita dalla natura; perchè tagliando la fig.ra 2.da la semicorda BK nel solo punto M, e la 3.za nei due punti M, M'; ne segue molto che per accomodarsi alla curva composta, della fig.ra 2.da sia necessaria l'azione della forza tendente $= p.\frac{1+qq.bc - \sqrt{1+qq}.bc.1-q}{2L}$

~~= p. 0,5934 bb~~

$= p.\frac{0,5772\,b^2 - 0,7190 . 0,9344 . bc}{2L}$, in cambio di q il suo sostituito valore, e per adattarsi alla curva della fig. 3. sia indispensabile l'azione $p.\frac{1+qq.bc - \sqrt{1+qq}.\frac{1+q}{2}.bc}{4L}$

$= p.\frac{0,5934\,b^2 - 0,7703 . 1,1422 . bc}{2L}$

Si ponga in vece di c la sua mezzana grandezza $\frac{22616}{35}$, e ridotto il computo

troveranno le due azioni

$\frac{pb^2}{2L}.0,0675$, $\frac{pb^2}{2L}.0,0324$.

Or ecco palesata la ragione, per cui

sarebbe

riescebbe, prescelta la curva della
Fig. 3.za; perchè cioè per adattarvisi
si richiederebbe un'azione
minore; quantunque la totale
azione, che segue nella semi-corda
della stessa figura $= \frac{pb^2}{nL} . \overline{1+9g}$
$= \frac{pb^2}{nL} . 1$, e però sia maggiore
di quella $= \frac{pb^2}{nL} . 3 . \overline{1+9g} = \frac{pb^2}{nL} . 1,0342$
che si effettua nella semi-corda della
Fig. 2.da

Che se col suono della corda
intera fossero congiunti quelli
della terza, e della quinta parti,
escludendo gli altri tutti, la natura
eleggerebbe una curva, che
tagliasse la retta BX in tre
punti, per ripiegarsi nella quale
nel tempo $t = \frac{b}{nb}\sqrt{\frac{2M}{hP}}$ s'impie-
gasse la minima azione.

Continuando il discorso
il Sig.r Conte si accorge, che i
punti di intersecazione M, M,
ecc. sarebbero tanti, quanti
i suoni diversi: ma applicata
la penna al punto medio C della
corda AB, i suoni delle parti
aliquote dispari uniti col princi-
pale sono moltissimi, come
raccoglie dall'esperienza; dun-
que grandissimo è il numero

dei

dei rispettivi M, M', M'' &c. questa curva composta data dalla natura si confonda approssima assaissimo alla retta | B X, onde la corda per accomodarsi ad essa curva, faccia un piccolissimo bilanciamento ad ottener il quale non si richiede salvo che una minimissima azione.

Quello, che ho detto dalla figura primitiva A X B, si applichi a qualunque altra, e si conchiuda, che la corda si ripiegherà, nella curva composta, che più ad essa avvicinasi, impiegandovi una piccolissima azione.

Conchiudo colli avvertire non dover recar meraviglia, che nell'atto del bilanciamento le parti vicine (Fig. 3.) N M, M M'; ~~M M', M'B si muovano contrariamente~~ della semicorda N M S M' Z B si muovano contrariamente; imperciochè ciò continuamente addiviene nella corda sonora. Sottoposto uno scannello al punto medio C della corda A B (Fig. 5), si renda immobile esso punto premendolo con una testa di compasso. Si inciti poscia al suono la porzione C B, ed accaderà, che mediante la comunicazione del moto le due metà C B, C A concepiscano movimenti contrarj

qualmente

egualmente la figura dimostrativa
[illegible] nella materia si
confonde [illegible] assaissimo
alla retta A X, onde la curva [illegible]
a [illegible] ad [illegible]
un piccolissimo [illegible]
all'altezza il quale non [illegible]
[illegible] che una menomissima azione.
[illegible] che ho [illegible] della figura
[illegible] A X B, [illegible]
[illegible], e si [illegible]
[illegible]
[illegible], che più all'altra [illegible]
[illegible] una piccolissima azione.

[illegible] colli [illegible]
[illegible]
[illegible] [illegible]
[illegible]
[illegible] si muovano [illegible]
[illegible] della [illegible]
[illegible]
[illegible] si muovano [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] A A (fig. 5), [illegible]
[illegible]
[illegible] con una testa di [illegible]
[illegible] al [illegible] a
[illegible], che
[illegible] la [illegible] del
[illegible] C B C A [illegible]
[illegible] movimento [illegible]
[illegible]

Notizia
di
Monsignore Agostino
Steffani
Vescovo di Spiga &c.

N. 4. Tomo XXXIII.

Notizia intorno di Monsig.re Agostino Steffani Vescovo di Spiga, e Vicario Apostolico negli stati dell'Elettor Palatino del Reno, dal March. di Brandenburgo, e da' Principi di Brunswich.

Compilata dal Sig. Co. Giordano Riccati

È stata sempremai giudicata lodevole impresa il cercare di togliere dall'obblivione la memoria di quegli uomini illustri, che o per sapere, o per operazioni virtuose si sono distinti dal comune degli altri. In cotale eletto drappello occupa certamente un posto assai degno Monsig.re Agostino Steffani Vescovo di Spiga, e Vicario Apostolico negli stati dell'Elettor Palatino del Reno, dal March.e di Brandenburgo, e dai Principi di Brunswich. Nacque egli in Castelfranco del Trivigiano di onesta condizione li 25. Luglio 1654. e furono suoi genitori li Sig.ri Camillo Steffani, e Paolina Teraggo. Fatti in patria i suoi primi studj sotto que' precettori, che la Comune manteneva a beneficio della gioventù, passò giovinetto in Baviera. Io congietturo, che fosse vi chiamato da un suo Zio materno impiegato al servizio di quell'Elettore, e da vigore alla mia congiettura, che un suo maggior fratello per nome Ventura, nato li 3. Gennajo 1646., che fu molti anni alla Corte di Monaco si chiamò sempre Teraga fosse probabil=

mente

mente per disposizione testamentaria dal Zio. Fu dichiarato questo Ventura dal Duca di Baviera, del titolo di Consigliere; e morì poscia in Padova [illegible] dove aveva ottenuta la carica di Collaterale [illegible].

Fornito il giovinetto Agostino di straordinarj talenti, continuò con fervore i suoi studj, ed avendo inclinazione grandissima per la Musica, si esercitò nel suonare del gravicembalo, e dell'organo, nel canto, e nel contrappunto sotto la direzione di Ercole Bernabei Maestro di Cappella della Corte Elettorale. Quali rapidi progressi ei facesse, chiaramente il dimostra e l'essere stato ben presto dichiarato Organista dal Duca Ferdinando, e l'aver dato alla luce una mua di Salmi intitolata sul gusto che allora avea corso: Psalmodia Vespertina volans octo plenis vocibus concinenda ab Augustino Steffanio Ser. Romae anno 1674. aetatis suae anno 19. Dal Magnificat di questi Salmi ha estratto un esempio il celebre P. M. Giambatista Martini per inserirlo nella seconda parte del suo Esemplare, o sia Saggio fondamentale pratico di Contrappunto fugato stampato in Bologna l'anno 1775. Il seguente elogio fa grande onore allo Steffani: Sarebbe di gran vantaggio ai Giovani Compositori se avessero sotto gli occhi

questi

quest'Opere sparse; perchè oltre la naturalezza dello stile, e la bizzarria, rilevarebbero di quando in quando, il saper esprimere qualche distinto sentimento delle parole, e alcuni piccoli pezzi pieni di bel ritmo, ed alcune bizzarre per le singolari modulazioni. Pubblicò ancora il nostro valente Autore una Opera di Sonate a quattro Strumenti da lui composta; ed indi comparve alla stampa il suo *Sacer Janus Quadrifrons Motecta trium Vocum; Monachij* 1685.

In tal anno fu egli condotto in qualità di Tenore nella Cappella del Santo a Padova. Questo fatto è certissimo, benchè col mezzo dell'eruditissimo Sig.r Co. Domenico Polcastro, esaminati diligentemente i libri dell'Arca, non si sia potuto ritrovare l'Atto della Condotta. Non se ne sarà forse fatto il registro; perchè essendo passati per Padova i Principi di Brunswick, e di Hannover l'anno 1686, ed avendo ammirato il raro talento, e l'eccellenza nella musica professione; il presero al loro servizio, ed egli abbandonò la Cappella, che aveva per pochi mesi servita. Divenuto Maestro di Cappella nella Corte di Hannover, compose per asserzione di G. Gian Gottofredo Walter (*Lexicon Musicum*) la Musica di varj Drammi in lingua Italiana recitati nel Teatro di Hannover, e poscia tradotti in Tedesco, e recitati nel Teatro di Amburgo.

Quantunque

Notizia di Monsig.re Steffani

Qualunque grande fosse la sua abilità nella Musica, non valeva egli meno nello disbrigo de' maneggi politici. Nell'Archivio della Sacra Congregazione de Propaganda Fide si conservano LXXXVI. Volumi di Carte appartenenti a Monsig.r Steffani, che questi descrisse, ed ordinò il celebre Abate Costantino Ruggieri, del quale scrisse la vita il chiarissimo Sig.r Abate Cristofano Amaduzzi, a cui io debbo in gran parte la presente Notizia. Contiene adunque il I. Volume le minute originali dei dispacci dell'Abate Steffani Inviato del Duca di Hannover a Bruxelles negli anni 1693. 1694. per l'affare del IX. Elettorato, e per quello della eredità del Re Guglielmo III. di Inghilterra, controversa fra la Casa di Hannover, e quella di Prussia.

Congiugnendo frattanto i grandi affari, e la Musica, diede colle stampe di Amsterdam una luminosa prova della vasta sua cognizione e della teorica della Musica, e della Storia Sacra, e Profana comunicando al pubblico un Libro, il cui titolo: Quanta certezza abbia da suoi Principii la Musica, ed in qual pregio fosse perciò presso gli Antichi 1695. Molta ricerca ho fatto di questa Opera assai rara, nè mi è riuscito di ritrovarla, salvochè nella Libreria dei P.P. M.M. Conventuali

in

in Bologna, e dandaveso di leggerla, e di esaminarla, gli ho fatto trascrivere.
Fu tanto applaudita specialmente in Germania, che come afferma il soprannominato Walterni, se ne fece la traduzione in lingua Tedesca, ed altra volta si ristampò. Il Sig.r Marchese A. G. trovandosi ~~nelli Serenissimi~~ luoghi, in un'assemblea ~~nella corte di~~ Hannover, aveva sostenuta la proposizione, che la Musica sia veramente scienza, e che negli antichissimi secoli si conoscesse meglio che in ora la di lei forza, e se ne facesse perciò maggior caso. Si rivolse questi con una lettera al nostro Autore, acciocchè colla sua autorità passo passo alle allegate ragioni. La risposta dello Steffani è scritta in Hannover nel mese di Settembre dell'anno 1694, ed in essa si intitola Abbate di Lepsing, e Protonotario della Santa Sede Apostolica. Conferma egli la prima asserzione, che la Musica sia veramente scienza, provando che essa ha per fondamento la più sicura ... proporzioni rinchiuse dentro il numero senario, nelle quali si debbono corrispondere le durate delle vibrazioni dei suoni, se hanno a ... armonia da recare diletto all'orecchio. Secondochè le dette durazioni ritengono le ragioni 2:1, 3:2, 4:3, 5:4, 6:5, si udiranno l'Ottava, la Quinta,

la

la Quarta, la Terza maggiore, e la Terza minore: lasciando il numero di sei sperimentato assai dissonante, e nascendo dalla maggiore 9:8 un intervallo, ch'egli chiama Tuono maggiore e che più esattamente si dovrebbe appellare Tuono superfluo. Si vede adunque, ch'egli considerava comparare la proporzione di 8 alla Seconda superflua. Dimostra, che si dividono armonicamente l'Ottava, e la Quinta nella più perfetta maniera, quella in Quinta verso il grave e Quarta verso l'acuto; e questa in Terza maggiore riferita al basso, ed in Terza minore collocata al di sopra. Dalla cosa detta conchiude, che la Musica effettivamente è scienza; perchè chi la conosce, e la tratta così cognoscit Rem per causam, propter quam ita res est, ut non possit aliter se habere. La seconda proposizione, che la Musica negli antichissimi secoli si conoscesse meglio che in ora la forza della Musica, e se ne facesse perciò maggior caso, il Ab. Steffani la mette in chiaro, colla più scelta, e copiosa erudizione, che fa toccar con mano, quanto egli avesse profondamente studiata questa materia. Aggiungo soltanto un passo, col quale dò fine alla Lettera, e che ben dimostra

chi

che egli pensava aver bisogno la Musica di essere presa per mano per esser dovere trattata. Io non so poi se la Musica sia in stima, o non so se bene che sia ci è, merita di esserci, e che da tutto ciò che ho detto, e da molto più che si potrebbe dire, si può comprendere che la Musica merita di esser studiata. Confesso però francamente, che compatisco chi non lo fa; perchè chi ha scritto ha scritto in modo, che chi legge perde la pazienza. Piaccia a Dio, che qualche bello spirito si muova a compassione di veder questa bella scienza calcare a gran passi la strada dell' oblio.

Non si chiamava contento l' Ab. Steffani delle teoriche ordinarie, e comuni, ma cercava di internarsi vie più, e di penetrare più a fondo la Musica. I suoi Duetti [illegible] mi servano di testimonio in molti pregio tenuti da tutti i Professori di Musica, ne' quali siccome si esprime il P. M. Martini, risulta a maraviglia l'alto suo sapere, e il suo gran possesso della pratica, e singolarmente de' contrappunti doppi di tutte le specie. Dall' attenta considerazione di tali eccellenti lavori ho chiaramente compreso, che il nostro Autore avea formata l' idea essere la musica

dissonanza

Dissonanza un nuovo suono aggiunto all'accompagnamento consonante fondamentale di Terza e Quinta: e sicome li accompagnamenti consonanti fondamentali hanno i suoi derivati di Terza e Sesta, di Quarta e Sesta; così parimente anche i suoi derivati ne nascono dall'accordo dissonante fondamentale. Quindi esempigrazia dall'accordo fondamentale di Terza, Quinta, e settima traggono l'origine i derivati di Terza, Quinta, e Sesta; di Terza, Quarta, e Sesta; di Seconda, Quarta, e Sesta: e dall'accordo di Terza, Quinta, e Undecima dipendono i derivati di Terza, Sesta, e Nona; di Quarta, Sesta, e Settima; di Seconda, Quinta, e Settima. I derivati dall'Accordo della Settima si incontrano in tutti gli Autori, ma non così i derivati dagli altri accordi dissonanti della Nona, della Undecima, e della Terzadecima. Lo Steffani li adopra frequentemente, e da ciò ne nasce la perfetta unità della sua composizioni rispettivamente alla melodia, e all'armonia.

Pensano alcuni, che il considerare la dissonanza come suoni aggiunti all'accompagnamento consonante perfetto, ed il porre in uso gli accordi derivati dai fondamentali della Nona, della Undecima, e della Terzadecima

sia

Notizia di Monsig.r Steffani.

-zia invenzione del Padre Francesco An-
tonio Calegari primo Maestro di Cap-
pella nella Chiesa di S. Antonio di Pa-
dova, ed indi in quella di Venezia
chiamata volgarmente dei Frari, e che
essendo stato seguitato dal P. Vallotti,
dal Sig.r Giuseppe Tartini, dal Sig.r
Giuseppe Saratelli, che fu poscia Mae-
stro di Musica nella Chiesa Ducale di
S. Marco in Venezia, e da altri valen-
tuomini, si sia andata una nuova
scuola formando. Al P. Calegari, e
prima di lui all'Ab. Steffani par vero
dire non siano debitori della men-
tovata scoperta, ma non si può loro
negare il merito di aver rinnovato
l'uso di ciò, che hanno praticato i
migliori Autori del secolo decimosesto,
dalli attento esame dei quali hanno
eglino ricavato la vera idea delle
dissonanze, e dei loro maneggi.

Ma tornando ai Duetti, è mara-
vigliosa la loro condotta, in cui si con-
giungono lo stile periodico, la varietà
e l'uniformità. Mettendo in Musica
un versetto, inventa alcune cantilene,
che si legano in armonia, e che viva-
mente esprimono i sentimenti della
Poesia, e col loro intreccio passando
opportunamente la modulazione ai tuo-
ni al principale subordinati, ~~conduce~~
perviene al termine del suo eccellen-
te lavoro. Non si finisce mai di ammi-
rare l'artifizio della condotta, che
riesce [illegible], non affettata, facile, e

dilettevole

d'ottava volta. Io conosco un eccellentissimo Maestro, il quale ha per costume di osservare di tanto in tanto il suo vecchio Dettato di un [illegible] compaste qualche anno prima, e tornandolo a scrivere, e mettendo al paragone il vecchio col nuovo, trovai sempre la condotta in questo più perfetta che in quello: tanto è vero, che al perfettissimo si possiamo accostare bensì, ma non giungervi compiutamente giammai.

La fama della dottrina, del costume ecclesiastico, della prudenza, ed abilità ne' maneggi, onde andava fornito l'Ab. Steffani, si era largamente diffusa talmente che meritò di pervenire al Pontifico Trono, sopra cui degnamente sedeva Clemente XI. Li 13. Settembre adunque dell'anno 1706. lo creò Vescovo di Spiga per la morte di Mons.r Gaspare Gasparini, abilitandolo a ritenere la Badia di Lepsing. È Spiga, che Cizico ancora si appella, una Città della Misia in Asia, di cui cantò Ovidio (L. 1. Tristium)

Hinc quae Propontiacis haerentem Cyzicon oris,
Cyzicon Aemoniae nobile gentis opus.

Nella Proposizione Concistoriale si legge: *Ad illam (Ecclesiam) promovendus ex Catholicis honestisque parentibus in loco Castrifranchi Dioecesis Tarvisensis ortus annorum 50., et ultra a pluribus annis Presbyter, I. U. D., Abbas Abbatiae Lepsingensis,*

Vir

Vir gravis, prudens, in agibilibus praestans, in Ecclesiasticis functionibus versatus, optimisque moribus imbutus, unde dignus videtur, qui ad Ecclesiam promoveatur. Haec omnia constant ex Processu coram R. P. D. Iulio Piazza Archiepiscopo Rhodiensi Coloniae Nuncio Apostolico formato.

Non voglio tralasciare di qui registrare la lettera molto onorifica in data dei 13. Novembre 1706. del Cardinale Fabrizio Paolucci Segretario di Stato, con cui a nome del Papa Clemente XI. risponde alla lettera di ringraziamento umiliata a Sua Santità per la dignità Vescovile conferitagli.

Illme, et Rme Dne

Quod Ssmo D. Nro proxime exhibuisti, plurimis obsequiis, gratique animi testimonium ob delatam tibi Spiritus Ecclesiam, acceptum admodum Sanctitati Suae, atque iucundum fuit. Episcopali autem dignitati Sua Stas Vicarii quoque Apostolici munus adiungere decrevit, ut Pontificiae erga te benevolentiae magnitudo plenius adhuc, ac luculentius tibi perspecta sit, quam singularis, spectatusque tuus vetustioris zelus, cum eximia in hanc Sanctam Sedem devotione coniunctus, tibi merito conciliavit. Tuum itaque erit omni ope conniti, ut Sanctitatis Suae tam honorificae de tua pietate iudicio, ac voluntate respondeas, ac in

iis

iis praecipue, quae ad orthodoxam fidem tum conservandam, ubi floret, tum unde excidit, restituendam pertinent, utriusque officii debito maxime satisfacias. In quo si nihil praetermiseris vel studii, vel operae, vel laboris, praeter insigne meritum apud Deum, paternum quoque Sanctitatis Suae animum arctius tibi devinxeris, et ad uberiora in dies Pontificiae benignitatis documenta tibi exhibenda vehementer excitaveris. Haec SSmi Patris verbis ad epistolam tuam rescribere iussus sum, tibique Apostolicam benedictionem amanter elargiri; Quod exsequens laeta tibi, faustaque omnia cum diuturna incolumitate à Deo augurar.

Datum Romae die 13 Novembris 1706.

Dominationis tuae Illmae

D. Augustino Stephani electo Epo Spigacensi.

Ad Officia paratissimus
Fabricius Card. Paulutius.

Grato il nostro Monsignore alla Pontificia beneficenza, intrapresa con tutto il fervore l'esercizio del Vicariato Apostolico nella Missione di Hannover, ed incontrò talmente gradimento, che con lettera Apostolica de 26. Feb.o 1709 gli concesse il S. Padre il grado di Nobiltà, e molte esenzioni;

e

Notizia di Monsig.re Steffani

e privilegi. Colla Lettera Apostolica poi dei 6. Aprile dell'anno stesso. Dividendo Vicariatum Apostolicarum Missionum administrationem ab Orthone Epo Columbricensi in locis Dominio temporali Ducis Brunswicensis, et Lunaburgensis subiectis, et in Caritatibus, et Diocesibus Bremensi, Suerinensi, Magdaburgensi, Mechalburgensi, et Halberstadiensi, nec non in Glucstat, et Altona, ac in omnibus locis totius ditionis temporalis Regni Daniae, contulitur pars eiusdem Vicariatus Augustino Epo Spigacensi in omnibus regionibus Ioh. Guilielmo Comiti Palatino Rheni, S. R. I. Principi Electori, Marchioni Brandenburgico, et Principibus Brunswicensibus subiectis. E perchè Monsig.re Steffani pieno di zelo, ed infaticabile si dimostrava, lo costituì il gran Pontefice con Lettera Apostolica dei 16. Luglio 1712. Visitatore Apostolico dentro i confini del suo Vicariato delle Missioni Settentrionali.

I Volumi di Carte poste in ordine dalli Ab. Ruggiari mentovati di sopra fanno una piena testimonianza della somma attività e prudentissima direzione del nostro Prelato. Nel III. Volume si hanno i carteggi originali fra il Vescovo di Spiga, ed il Duca Antonio Ulrico di Brunswich dall'Anno 1708

13 e Stat 1714 toccanti il Matrimonio della Principessa Elisabetta sua figlia con Carlo III. di Austria Re di Spagna; la conversione dello stesso Duca alla Religione Cattolica, e la fabbrica della Chiesa in Brunswich. Nel IV. Volume si contiene il negoziato dello stesso Vescovo come Plenipotenziario dell' Elettor Palatino fatto in Roma l'anno 1709. per sedare le turbolenze insorte tra la Santa Sede, e l'Imperatore Giuseppe I. Si leggono pure molte lettere originali dell' Elettore Palatino su questo affare, e varie scritture circa la ricognizione di Carlo III. in Re di Spagna, ed un abbozzo di Storia di tutto il negoziato incominciata dal Vescovo suddetto ma non finita. In premio di sì fruttuose fatiche gli conferì il Pontefice la Prepositura di Seltz nella Diocesi di Argentina, e l' Abbazia di Carrara, di cui fu investito in Padova tertio Nonas Septembris 1709.

Venendogli la Prepositura di Seltz contrastata dai Gesuiti di Argentina, si contengono nei Volumi XLVII, LIII, LIV., LV., LVIII. molte carte al detto affare spettanti, e nell' ultimamente nominato alcune lettere del Conte di Bothmar Segretario di Stato del Re di Inghilterra impegnato colla Corte

di

di Francia a favore del Vescovo di Spi=
ga contro i Gesuiti suddetti.

Fece Monsig.re Steffani l'anno 1716
un viaggio in Hannover, di cui si
trova il Diario nel Volume LI. A
chi volesse scriverne congiuntamente
la Vita, sarebbe necessario di avere
un tale Diario sotto degli occhj, ed
altresì i documenti tutti, che ho sopra
accennati. Essendo mia intenzione
il distendere soltanto queste Notizie del
nostro Prelato, che sono bastevoli a formar idea
del suo merito; mi contento di accen=
nare la cosa, e nello stesso tempo pre=
parare la materia, ed indicare i fonti a
chi prendesse risoluzione di più ampiamente trattarne.

Mi sono bensì col mezzo dell'eru=
ditissimo Sig.r Abate Amaduzzi procu=
curato la notizia della minuta di lettera
indirizzata dal nostro Monsig.re a Rug=
giero Fedele Maestro di Cappella
del Langravio di Hassia contenuta
nel Volume LI., ed altresì della lettera
originale di Ruggero Fedele suddetto
dai 16. Novembre 1713 ai 10. Ottobre
1716. compresa nel Volume LVII., che
oltre al discorrere della Corte di Hassia
Cassel, e delle Missioni, parlano anco=
ra di Musica. Possedendo lo Stef=
fani quella facoltà in grado eminen=
te, sperava di trovarvi dei nuovi
lumi, e delle nozioni non familiari,
che il suo valore rendessero via più
manifesto.

manifesto. Ma la mia speranza è riuscita vana; riducendosi a poco quello che si è trovato di mano incominciata riguardo a cose di Musica. Ciò vien spiegato di Lettera di Ruggiero Fedeli scritta a Monsig.r Steffani da Cassel li 14 novembre 1713.

" Non vi è qui Musica di Camera
" che sempre non si canti, e suoni delle
" erudite composizioni di V. S., ed il
" nostro clementissimo Padrone ne gode
" al maggior segno, e ne fa stima impa-
" reggiabile, quando vengono prodotte,
" come ancora tutti. Abbiamo Opere di
" Hannover, come tutte le di lei composte
" in Düsseldorff, ancor li pregiati Duetti
" e molti altri: che ogni cosa è stimata,
" ed onorata meritamente al non plus ultra,
" e beato chi ne possiede. Non mi spiegherò
" in questo di avvantaggio, perchè già
" fama volat per tutto il mondo, e sarebbe
" un volere ingrandire il mare . . . .
" In nome di Dio torniamo al discorso della
" Musica; vi è un Duetto di V. S. nella
" Opera di Düsseldorff, che dice = Già bra-
" ma il mio cuore, poi morire, morire,
" morire = Credo già, che l'abbiamo fatto
" migliara di volte. Vi è il lapis philoso-
" phorum in tutte le di lei virtuose compo-
" sizioni, e questi nostri Musici non cantano
" con gusto alcuna composizione, quanto quella
" di V. S. Ill.ma Ardisco pregare con ogni ris-
" petto; sebbene, che V. S. dopo altre sue

" occupazioni

« occupazioni passava qualche oretta per
« suo diporto nella Musica: chi potesse
« esservi appresso, e buscar qualche rarità,
« di che fortuna sarebbe! Ma posso ben
« battermi il petto in colpa, e dire Dne,
« non sum dignus; però potrei anche dire
« Dne, dignare me!, ma non oso, perchè
« non ho alcun merito. Ma quanto piacere,
« ed onore darebbe V.S. al nostro Ser.mo
« Padrone! è indubitabile il poterlo spiegare;
« si gonfia, e si ha per gloria, quando si
« canta delle virtù di V.S. »

Monsig.re Staffani così rispose da Neühaus ai 26. novembre 1713.

« Veniamo alla Musica. Sono delicta
« iuventutis. Io le confesso, che l'amo
« ancora più che mai. Ma con verità posso
« dire, che alcune volte sto molti anni
« senza veder un cembalo. Ella mi parla
« di Opere di Düsseldorff; io non so aver=
« ne fatte; ma sono Opere del Sig. Grego=
« rio Piva. Comunque siasi, io l'ho in=
« teso con grandissimo compiacimento, che
« quelle bagatelle divertano il Ser.mo Sig.r
« Langravio. »

Dimostra lo squarcio di Lettera di Ruggiero Fedeli la stima grande in cui si tenevano le composizioni del nostro Autore, e ch'è veridica l'asserzione di Giov. Gothofredo Waltern, ch'egli in Hannover avea scritta la Musica di varj Drammi. Si raccoglie ancora che prima del 1713 avea composti i Duetti, ed anzi chiamando Monsig. Staffani le sue profane composizioni delicta iuventutis, io credo certamente che

che siamo di parecchi anni anteriori al tempo, in cui fu sublimato alla dignità episcopale:

Una bellissima espressione della parola morire si trova nelle eccellente Duetto di Monsig.re Steffani Saldi marmi, che adduco in esempio nel mio Trattato di Contrappunto (Lib. IV. Cap. VI.) per provare, che anche il Tuono per Terza maggiore può servire agli affetti molli. Non si può meglio esprimere il sentimento poetico Deggio al nuovo desire opporre il vostro gelo, o pur morire.

* la quale senza dubbio non sarà inferiore a quella, che tanto loda il Fedeli nella sua Lettera.

Si indusse il nostro Prelato nell'anno 1719. a rinunciare con pensione la Badia di Carrara a Monsig.r Rusatti, come si raccoglie dai registri della Cancelleria Episcopale di Padova. Fu ciò cagione di varj disturbi; ~~e come si vede nel Vol. LVII. in una lettera del Conte Mocenigo scritta in Francese da Venezia ai 30 Dicembre~~ leggendosi nel Vol. LX. lettere di Monsig.r Federico Cornaro Uditor di Rota dai 22. Gen.o 1724. sino al dì 1. Aprile dell'anno stesso, ove si parla delle differenze insorte con Monsig. Rusatti per la Badia di Carrara, siccome ne parlano altre lettere susseguenti del Marchese Benedetto Salvarico, del Nob. Uomo Quirini, e di Madama Cavaliera sua Moglie ed altre soprattutto dell'Abate Sebastiano Mattei Uditore del Nunzio di Venezia dai 26. Dic.e 1725. a 28.

Giugno

1727, nella quali si fa menzione Grigioro ~~jeune~~ si tratta della morosità di Monsig.re Fassatti in pagare la pensione.

Per trattare due affari col Re Vittorio Amadeo, uno de' quali era il matrimonio d'una Principessa di Modena col Principe Reale di Piemonte, e l'altro la carica di Rettore, e Presidente della Università di Torino, a cui aspirava il Vescovo di Spiga, spedì questi il Bossis Torinese suo Segretario a quella Corte; ma non essendo in niuno dei due riuscito, morto il Bossis la disgrazia di Monsig.re, e fu costretto di prender soldo in qualità di Segretario del Marchese di Trivié, spedito Ambasciatore dal Re Vittorio alla Corte di Varsavia. Le lettere originali del Bossis sono contenute nel Vol. LIX. ed incominciano dai 15. Marzo 1722, e continuano fino ai 23. Settembre 1725.

Le lettere alla Congregazione di Propaganda, a Cardinali, Prelati, Agenti, Amici, Letterati, ed altri sono innumerevoli, e meriterebbero di essere distintamente considerate da chi avesse in animo di scrivere una Vita compiuta. Io come ho detto di sopra, mi ristringo dentro i limiti, che richiede l'idea che ho presa di comunicare al pubblico le più interessanti notizie del nostro Prelato, e di raccomandarne ai posteri la memoria.

Anche nel Vol. LXIV. vi hanno lettere dal Co. Girolamo Grimaldi Roberti, dal Sig. Giuseppe Saracina Agente del Re di Inghilterra, e dal Maresciallo di Schulemburg sopra il medesimo argomento.

Notizia di Monsig.re Steffani.

Trasferitosi a Padova l'anno 1723. si trattenne ivi qualche mese, e con lui ebbe occasione di conversare il celebre P. M. Vallotti insigne Maestro di Cappella, e grande ammiratore del valore dello Steffani nel Contrappunto. Essendosi in essa Città stampata, per suo consiglio l'Opera

Romanorum Pontificum Breviarii Notitia Rituus Ecclesiasticos ac singulis institutos praecipue declarans. Accedit.

Onomasticon vocum obscuriorum, quae in Missali, Breviario, Martyrologio Romano et hac Notitia continentur.

Auctore

Guilielmo Burio Bruxellensi Ecclesi. Metrop. Mechlin. Canonico Zellariensi Patavii MDCCXXIV. ex Typographia Seminarii Apud Joannem Manfrè Superiorum permissu et Privilegio.

fu questa dedicata al nostro Monsignore da Girolamo de' Bianchi, leggendosi dopo il frontispizio

Illustr.mo et Rever.mo D. Augustino Episcopo Spigacensi Praelato Domestico, et Assistenti Hieronymus de Blanchis F.

Qui a Te profectus, Te auctore, atque impulsore lucem primum in his regionibus videt, ad Te redire gestit, Vir Illustrissime ac Reverendissime, Tibique inscribi

inserviri jure quodam suo postulat
Libellus iste &c. Doloroso somma-
mente è ~~[illegible]~~ il passo, che si alla pag.
119 si si legge nella Vita di Clemente
XI.. Nec illud praetermittendum hoc
regnante Pontifice in Germaniae par-
tibus, ubi Lutheri impensius secta
colitur et obstinatius defenditur,
Catholico Episcopo Vicario Apostolico,
potestatem factam et magnificam
aedificare Ecclesiam, et Episcopalia
Munera omnia palam Catholicorum
more tutissime, et honestissime obi-
re, notandosi al margine Is est
Augustinus Stefani Episcopus Spiga-
nus: ^ ~~degno frutto del zelo, e dai~~
maneggi ~~del nostro illustre Prelato~~

^ che tanto giunse ad ottenere col suo zelo, e colla destrezza dei suoi maneggi.

Ma mentre ~~giunto~~ pervenuto all'anno 74,
dell'età sua, dalle continue fatiche vien
... stanco, intrapreso il viaggio per ritornare
in Italia a cagione di passarvi in
quiete il restante dei giorni suoi,
fu assalito in Francfort da un forte
colpo di apoplessia, che lo privò di
vita il dì 12. Feb.° dell'anno 1728.
Non sarà discaro a chi legge, ch'
io qui rapporti la fede della sua
morte:

Beati Mortui, qui in Domino mo-
riuntur. Amodo iam dicit spiritus,
ut requiescant a laboribus suis.
Apocal. 14. V. 13.

Quis est homo qui vivet, et non vi-
debit mortem? indicat Psalmi 88.

versus

versus 49. Psalmistam sequentur Ecclesiasticus, Davidaim Patrem Salomon filius referens Cap. 17. V. 29. non est immortalis filius hominis. Quod David affirmat, et Salomon confirmat. Id Testimonio luculento comprobat Rev.mus et Illustris.us Dominus Dominus Augustinus Dei Gratia, et Apostolicae Sedis Episcopus Spigacensis. Sanctis.mi Dom.ni Nostri Dom.ni BENEDICTI XIII. Prelatus Domesticus, et Assistens; ad Partes Septentrionales et per Saxoniam Vicarius Apostolicus, quem Justus Dominus per Mortem piissimam, astantibus, et orantibus plurimis Sacerdotibus, ex hac mortali ad vitam immortalem evocavit, ut post tantum laborem requies; post tot bona opera praemium, post tot virtutes honor, et gloria sequeretur. Praefactus Rev.mus et Illmus Dom.us Episcopus fenit natus 15. Julii Anno 1653. factus vero Apoplexia, et signatus S. Unctione extrema denatus in Februarii currentis Anni 1728 et sepultus in ejusdem in Imperiali Collegiata, et Parochiali Ecclesia ad Sanctum Bartholomaeum, in Sacello S. Mariae Magdalenae dicto. In fidem hoc Documentum Mortis propria manu scriptum subscripsi, et consueto Sigillo roboravi meo.

Francofurti 3. Maij 1728.

(Loco Sigilli Collag.iae Imper.is)

Albertus Praz
Praefactae Imperialis Ecclesiae Can. Capit. Scholasticus et Parochus M.u P.a

Notizie di Monsig.re Steffani.

Nell'anno, e nel giorno della nascita d'esso avevano insegnandomi i registri de' Battesimi della Chiesa Parrocchiale di S. Maria, e S. Liberale di Castelfranco essere nato Agostino Steffani adì XXV. Luglio 1654: siccome ho asserito al principio ~~della presente~~ di questa Memoria. Dovettero i suoi Parenti incontrare una causa colla Camera Apostolica per ottenerne l'eredità, che finalmente conseguirono considerandola come proveniente *ex lucris factis ob quamplurima servitia praestita tam Sacrae Caesareae Majestati, quam Electoribus Maguntiae, et Palatino, ut colligitur ex Relatione habita ab Illmo, et Revmo D. Nuntio Coloniae, ac enunciata in Summario Relationis Eminen.mi et Revmi D.i Cardinalis Ponentis*. Ho già narrato, che nell'Archivio della Sacra Congregazione de *Propaganda Fide* si conservano le sue carte poste in ordine dal ch. Ab. Costantino Ruggieri. Le carte di Musica passarono in mano degli Eredi, che non ne tennero quel conto, che meritavano.

Educato principalmente per la Musica, di cui, e nel suono, e nel canto, e nel contrappunto, fu Professore eccellente, i suoi rari talenti non poterono ristringersi dentro sì angusti confini. Studiò egli profondamente

Notizia di Monsig.re Saffini.

tanto nelle materie ecclesiastiche, e politiche, ~~ai meriti~~ di essere innalzato alla dignità di Vescovo ~~[illegible]~~ dalla S. Sede, e Apostolica; e di essere impiegato da molti Principi in rilevanti maneggi; la sua felice riuscita rese glorioso il suo nome, come si può raccogliere dalle presenti Notizie.

Del moto di discesa, o di ascendimento
de' corpi solidi immersi
ne' Mezzi fluidi.
Dissertazione
impressa nel Tomo IV. della Raccolta
Ferrarese d' Opuscoli
Vinegia
1780
nella Stamperia Coletti
pag. 1.

Del moto di discesa, e di ascendimento
dei corpi solidi immersi nè mezzi fluidi
Dissertazione Fisico-Matematica del
Conte Giordano Riccati

1. Nella edizione delle Opere del Galileo fatta in Firenze l'anno 1718. stabilì il profondissimo Geometra P. Ab. D. Guido Grandi la legge della velocità riferita al tempo di un corpo solido, che per un fluido discende. Chiamando m la massa del solido proporzionale al suo peso, n la massa di un pari volume di fluido, la qual è parimente al suo peso proporzionale, u la velocità acquistata dal solido, e t il tempo speso nell'acquistarla, il canone scoperto dal lodato Autore vien espresso dalla formola $\overline{m-n}.t = mu$.

2. Il Co. Jacopo Riccati mio Padre comunicò al P. Abate l'osservazione (1), che siccome avea egli rettamente determinata la cagione del moto $\overline{m-n}.t$, essendo la differenza m-n tra i pesi delle due masse m, n la forza, che stimola al movimento; così relativamente all'effetto avea tralasciato di computare la massa n del fluido, che si move all'insù colla velocità u, spinta dal solido m, che discende. Introdotto nella formola questo elemento, prende il seguente aspetto $\overline{m-n}.t = \overline{m+n}.u$, o sia $\frac{m-n}{m+n}.t = u$.

3. Rispose il P. Ab. Grandi, ch'egli dubitava, che non si rimettesse in campo una partita già pareggiata, facendo il conto due volte sopra il fluido n uguale in mole al corpo m, se si parla della tendenza di esso; oppure che non si volesse richiamare in iscena ciò, che si era accordato di lasciarlo fuori, e prescinderne (cioè a dire la resistenza) se si parla del moto attuale del medesimo fluido.

4. Aggiunse non accordarsi col vero, che alla discesa di un solido dentro un fluido salga altrettanta mole di esso fluido; imperciocchè in ciascun menomo tempicello si muove solamente quella parte infinitamente piccola, che viene scacciata di

(1.) Opere del Co. Jacopo Riccati Tomo III. Schediasma XXXIII. pag. 405.

di luogo, e con una velocità non maggiore di quella, con cui cammina il solido, e però al moto del solido si aggiunga per conto del fluido un'altra quantità di moto infinitamente più piccola e trascurabile, onde rimanga intatta la formola $\overline{m-n}.t = mu$.

5. Si possono egualmente sciorre gli argomenti dell'Ab. Grandi. E quanto al primo, la quantità n del fluido in figura di forza è certamente computata una volta sola nel termine $\overline{m-n}.t$. Che poi non si abbia da introdurre nelli omogenee di comparazione $\overline{m+n}.u$ in qualità di massa inerte, accordando anche il Co. Jacopo, che si debba prescindere dalla resistenza, questo non può concedersi; perchè volendo trasandare ogni resistenza, si dovrebbe omettere anche il peso del fluido, il quale ritarda il moto del solido. Le resistenze, che non si mettono in conto, sono quelle che dipendono dalla scabrosità del solido, e dalla tegnenza del fluido, le quali sono per così dir estrinseche in riguardo alle presenti ricerche. Ma la gravità, e l'inerzia del fluido sono egualmente inviscerati nel Problema, e del pari importanti, di modo che ugualmente pecca chi o l'uno, o l'altro trascura.

6. Nè giova ricorrere al secondo argomento affermando, che in tempo minimo si muova soltanto quella parte infinitesima di fluido, che viene scacciata di luogo, e con velocità non maggiore di quella, con cui viaggia il solido; imperciocchè farò vedere, che se unitamente col solido si movesse una parte minima di fluido, la velocità di questo dovrebbe essere infinitamente maggiore della velocità di quello, il quale camminerebbe con una lentezza infinita, e fisicamente non discenderebbe

7. Il Co. Jacopo frattanto prima di replicare agli argomenti dell'Ab. Grandi, mise in vista una conseguenza giudicata assurda, che dalla teorica di lui deducevasi, ed è che quando il solido è più leggiero del fluido, potrebbe ascendere con una velocità maggiore in qualunque proporzione di quella di un grave cadente. » Un corpo grave (dice egli)

posto

» posto in un fluido di maggiore gravità specifica in tanto
» ascende, in quanto viene estruso, e cacciato in alto dal
» maggior momento del liquido. Per altro il corpo più leggie=
» ro in ispecie non ha in se stesso alcuna facoltà, o alcuna in-
» clinazione alla salita; e perciò non può mai ascendere
» con maggiore celerità di quella, con cui possa discendere
» il fluido, dal quale è spinto ed estruso. Ma certa cosa è,
» che il fluido non può discendere con maggiore velocità di
» quello farebbe in discendendo nel vuoto, quand'anche il
» solido immerso si supponga d'una infinita rarità; dunque
» la velocità del solido ascendente, quantunque rarissimo,
» non può mai superare la velocità de' gravi cadenti in tempo
» pari nel vano. »

8. — Conciossiachè il P. Ab. Grandi nulla soggiunse alla replica del Co. Jacopo; giudicò questi ch'egli restasse pienamente persuaso, e la stessa cosa ho asserita nella Prefazione al Tomo III. della Opere di mio Padre, e nelle Annotazione al citato Schediasma XXXIII. Ma essendomi caduta sotto degli occhi la sua Istruzion Meccanica stampata in Firenze l'anno 1739., mi sono accorto, ch'egli perseverò sempremai nella sua prima opinione. Ho presa dunque risoluzione di internarmi in sì fatta materia, e di esaminare da qual canto stia la ragione.

9. Ella è verità ammessa da tutti i Meccanici, e confermata con innumerabili sperienze, che il peso d'un solido immerso in un fluido si agguaglia alla differenza fra i pesi assoluti del solido stesso, e di un pari volume di fluido, cioè a dire valendomi de' miei simboli ad $m-n$. Discenda il corpo m per lo spazio ds, ed il detto peso eserciterà l'azione $\overline{m-n}.\,ds = mds - nds$, la qual è composta da due azioni, una positiva mds del corpo solido, e l'altra negativa $-nds$ del fluido. Quest'ultima azione può effettuarsi in maniere infinite, mentre il fluido $\frac{n}{h}$ ascende per lo spazio hds, onde ne risulti sempre il prodotto nds, potendo ad h assegnarsi qualunque valore tra l'infinito, ed il nulla. Se $h=1$, la massa n d'un volume di fluido pari a quello del solido

ascende

ascende per lo stesso spazio ds, per cui il solido cala abbasso. Posta h minore dell'unità, una massa fluida $\frac{n}{h}$ maggiore di n ascende per uno spazio hds minore di ds, e tutto al contrario succede, quando h supera l'unità.

10. La verità enunciata, che la reazione del fluido si agguagli sempre ad nds, si vuol munire con una rigorosa dimostrazione. Sia AD (fig. 1.) il solido di figura cilindrica, che discende, la sua massa m, e la massa di un egual volume di fluido $= n$. La figura dell'acqua ascendente sia la corteccia cilindrica $AGHKIGA$, e le basi del cilindro AD, e della detta corteccia si corrispondano nella ragione di $h : 1$. Le masse fluide contenute nei mentovati cilindro, e corteccia cilindrica stanno come le loro basi, cioè a dire come $h : 1$. Se dunque faremo $h : 1 :: n : \frac{n}{h}$, l'ultimo termine dell'analogia esprimerà la massa del fluido ascendente. Discenda il solido per lo spazietto $AE = ds$, e la massa fluida AF scacciata di luogo obblighi il fluido $AGHKIGA$ a salire per lo spazio HL; egli è chiaro che nel cilindretto AF, e nella corteccia cilindrica $CHLMKHC$ si comprenderanno eguali quantità di fluido. Quindi saranno le altezze $AE = ds$, HL in ragione inversa delle basi, ch'è quanto a dire $1 : h :: AE = ds : HL = hds$. Perciò calando abbasso il solido $= m$ per lo spazio $AE = ds$, la sua gravità eserciterà l'azione mds, e la gravità del fluido la reazione $\frac{n}{h} \cdot hds = nds$, come si dovea dimostrare.

11. Si potrebbe dubitare, che assegnata al solido una diversa figura, effettui tuttavia il fluido la reazione nds. Abbia il solido $ACBD$ (fig. 2.) qualunque figura, e per provare che il fluido esercita la reazione nds, si divida il solido in minimi elementi verticali, uno de' quali GI, la cui sezione orizzontale indicata dalla linea GL sia un infinitesimo quadratino, e la massa di un egual volume di fluido si chiami p. Discenda insieme col solido l'elemento GI per lo spazio $GM = ds$, e spinto fuori di sito il volume di fluido $\overline{GL}^2 \cdot GM$, obblighi questo ad ascendere il fluido NP, la cui base orizzontale corrisponda a $\overline{GL}^2$ nella ragione di $1 : h$, onde la massa liquida contenuta

nel

nel volume NP sia = $\frac{p}{h}$. Col metodo usato di sopra si fa vedere, che il fluido NP si alza per lo spazio QR = hds, e quindi esso fluido esercita la reazione $\frac{p}{h}\cdot hds = pds$. Nella stessa guisa dimostrerò, che calando in giù un altro elemento del nostro solido per lo spazietto ds, e posto che un pari volume di fluido si esprima per q, seguirà la reazione qds del fluido. Ora tutti gli elementi del solido compongono il solido stesso, e tutte le masse $p+q$ &c. compongono la massa n di un volume di fluido uguale a quello del solido; dunque mentre il solido discende per lo spazio ds, il fluido esercita la reazione $\overline{p+q+\&c.}\cdot ds = nds$; il che &c.

12. Resta che io renda la ragione, per cui il fluido obbligato ad ascendere sia di altezza uguale a quella del solido o del cilindro della figura 1., o dell'elemento della figura 2. Col moto del fluido ascendente una quantità di figura pari alla discacciata di sito dal solido discendente va a riempiere lo spazio rimaso vuoto al dissopra, e perciò il fluido spinto all'insù non può mai superare in altezza o il solido totale, come nella figura 1., o l'elemento, come nella figura 2., dai quali viene costretto a salire.

13. Egli è ben vero che il fluido, che monta all'insù, non è un prisma verticale, ma bensì un volume curvo, che principiando dall'elemento fluido scacciato di luogo, va a terminare nel sito vuoto analogo, che dee riempiersi. Sia (Fig. 3.) GI l'elemento solido della figura 2., e ZMSK LYTGH il fluido obbligato a passare dal detto sito all'altro MSIVTG. Il mentovato filo di fluido si tagli in qualunque luogo colla sezione orizzontale ST, e sia essa sezione alla GL come 1 : h. Spinto fuori di sito il fluido ZMGH, la superficie ST si alza sopra il livello ST per lo spazio hds, così richiedendo la ragione inversa delle sezioni GL, ST. Si consideri ZSIVTH come un canale ripieno di quel fluido, che monta in alto, il qual canale è diviso dalla sezione ST in due parti, una inferiore, e l'altra superiore. Ho dimostrato nelle Annotazioni allo Schediasma XXXVI. contenuto

nel

nel Tomo III. della Opera del Co. Jacopo mio Padre pag. 4.66. che quando, nel canale ZMSTGH il fluido si è alzato sopra la superficie ST per lo spazio $h ds$, è seguita quella stessa reazione, che si effettuerebbe in un canale retto e verticale, di figura prismatica, alto a perpendicolo quanto il canale ZT, ed avente la base uguale alla sezione ST, purché in esso parimente il liquore salisse in alto per lo spazio $h ds$. Lo stesso dicasi dell'altra parte di canale TK, in cui la superficie ST ascende altresì per lo spazio $h ds$. Si cavi la conseguenza, che seguono eguali reazioni nell'intero cannoncino ZY, ed in un canale NP alto quanto l'elemento solido GL, retto, ed a piombo, di figura prismatica, e fornito di una base uguale alla sezione ST, purché il fluido in quest'ultimo canale ascenda per lo spazietto $h ds$. Ma tutta la descritta proprietà convengono al fluido NP espresso nella figura 2., il quale ho provato esercitare la reazione $p ds$; dunque anche la reazione effettuata dal liquore ZY ha il medesimo valore, come si doveva dimostrare.

14. Se le sezioni orizzontali ST fossero da per tutto eguali, ed in oltre pareggiassero la sezione GL, la massa fluida posta in moto sarebbe $= p$. Se superassero GL, la detta massa fluida saria maggiore di p, e tutto al contrario minore, quando fosse $ST < GL$. Posto che non siano costanti le sezioni orizzontali ST, il fluido mosso può contenere una massa o eguale, o maggiore, o minore di p, secondo la varietà delle circostanze.

15. Ammessa la supposizione, che il fluido ascendente fosse fornito di movimento puramente verticale, la sua velocità starebbe a quella del solido come gli spazj elementari $h ds$, ds, che nello stesso tempo dai detti corpi si scorrono, e chiamata u la velocità del solido, si esprimerebbe per hu la velocità del fluido; e purché quella stessa stessissima massa liquida, cui da principio si imprime il moto, seguitasse sempre ad accelerarsi, si avrebbe la formola $\overline{m-n}.\,ds = mudu + \frac{n}{h}.\,h^2udu = \overline{m+hn}.\,udu$, da cui integrando ne nasce

$\frac{\overline{m-n}.\,s}{m+hn}$

$\frac{m-n}{m+hn}\cdot s = \frac{u^2}{2}$. Non si aggiunga costante; perchè ad $s=0$ dee corrispondere $u=0$. Nella formola differenziale si ponga in vece di ds il suo valore udt, e dividendo per u avremo $\frac{m-n}{m+hn}\cdot dt = du$, ed integrando ommessa la costante, onde a $t=0$ si riferisca $u=0$, $\frac{m-n}{m+hn}\cdot t = u$;

16. Sia minima la massa fluida ascendente $\frac{n}{h}$, e per conseguenza infinita la quantità h, e fatta l'osservazione, che la frazione $\frac{m-n}{m+hn}$ in tal circostanza diviene infinitesima, si inferisca, che il corpo m in tempo finito non potrebbe acquistare salvo che una velocità u infinitamente piccola, alla qual cosa l'esperienza manifestamente ripugna. Giudicò il P. Ab. Grandi, che la massa liquida infinitesima $\frac{n}{h}$ si potesse trascurare; perchè supposta che si movesse con velocità non maggiore di quella del corpo solido. Ma avendo io provato, che il fluido deve esercitare la reazione nds; ne segue che se si move la sola massa $\frac{n}{h}$, abbia da salire per lo spazio hds colla velocità hu, facendo acquisto della forza viva $hnudu$ acquistata per l'azione mds, la qual forza viva dovendosi necessariamente mettere a computo, ne nasce prima la formola $\frac{m-n}{m+hn}\cdot ds = udu$, indi l'altra $\frac{m-n}{m+hn}\cdot t = u$, che cogli esperimenti non vanno di accordo.

17. Alla formola del P. Ab. Grandi ci guida la contraria supposizione, che sia infinita la massa fluida $\frac{n}{h}$ posta in movimento, e conseguentemente $h=0$. Cancellato adunque il termine hn, ci si affaccia la formola dell'insigne lodato Scrittore $\frac{m-n}{m}\cdot t = u$; ch'egli non avrebbe mai pensato, che dovesse trarre l'origine da tale sorgente. Questa ipotesi è parimente ripugnante alla Fisica; imperciocchè un corpo finito m, che discende, non può in tempo altresì finito partecipare il moto ad una massa fluida infinita.

18. Si conchiude per tanto, che $\frac{n}{h}$ possa soltanto agguagliarsi ad una quantità finita. Che se inoltre fosse $h=1$, avremmo sotto degli occhi l'espressione sostenuta dal Co. Jacopo mio Padre $\frac{m-n}{m+n}\cdot t = u$.

19. Ora è tempo di esaminare, se sia veramente assurda la conseguenza, che il Co. Jacopo ha dedotta dalla sentenza

dal

dal P. Ab. Grandi, cioè che quando il fluido è in ispecie più grave del solido, si diano infiniti casi, nei quali dovesse questo ascendere con maggiore velocità di quella, che in pari tempo acquista un grave cadente. Al vette nm (fig. 4.) mobile intorno al punto C applico due masse $\frac{n}{h}$, m fornite di forze uguali ad esse masse, normali al vette, e tendenti da n verso A, colla condizione che siano le distanze nC, mC come $h : 1$. Se fosse $n = m$, le forze $\frac{n}{h}$, m si corrisponderebbero in ragione reciproca delle distanze nC, mC, e sarebbero in equilibrio: ma supponendosi $n > m$, dee prevalere la forza $\frac{n}{h}$, ed i punti n, m descriveranno gli archi nA, mB proporzionali alle distanze nC, mC, vale a dire come $h : 1$; di modo che chiamato s l'arco mB, sarà $nA = hs$. Non altrimenti posta la velocità in B uguale ad u, ne risulterà la velocità in A uguale ad hu. Avremo dunque per la formola della forza continuamente applicata $\frac{n}{h} \cdot hs - ms = \frac{n}{h} \cdot \frac{h^2u^2}{2} + \frac{mu^2}{2}$, o sia $\frac{n-m}{hn+m} \cdot s = \frac{u^2}{2}$. Prese le differenze, onde ne nasca $\frac{n-m}{hn+m} \cdot ds = udu$, e sostituito in cambio di ds il suo valore udt, e fatta la divisione per u, ci si presenterà $\frac{n-m}{hn+m} \cdot dt = du$, e finalmente integrando, tralasciata la costante, perchè quando $t = 0$, ha da essere parimente $u = 0$, $\frac{n-m}{hn+m} \cdot t = u$, ch'è la stessa equazione trovata di sopra colla sola varietà, che supponendosi $n > m$, si vede in essa scritto $n-m$ in vece di $m-n$.

20. Conciossiachè le forze si vogliono uguali alle masse, la massa $\frac{n}{h}$ si moverebbe colla velocità di un grave discendente, la quale pareggia il tempo t, se non avesse da spingere per la direzione opposta la massa m, e da contrastare colla forza ad essa applicata. Vediamo pertanto, se la velocità del corpo m possa mai superare quella di un grave cadente, o sia della massa $\frac{n}{h}$ sollecitata dalla forza $\frac{n}{h}$, e non impedita dalla massa, e dalla forza m. Ciò interverrà ogni volta che sia $\frac{n-m}{hn+m}$ maggiore della unità. Posta la grandezza $\frac{n-m}{hn+m} = 1$, si ha $\frac{n-2m}{n} = h$, e perciò se il coefficiente h sia più piccolo del detto valore, ne risulterà

$\frac{n-m}{hn+m}$

$\frac{n-m}{hn+m} > 1$, e la velocità u del corpo m più grande di quella acquistata in tempo pari dal mobile $\frac{n}{h}$ stimolato dalla forza non impedita $\frac{n}{h}$. Avverto che non si può ottenere un tal effetto, se n non è maggiore di 2m; imperciocchè mettendo n o eguale, o minore di 2m, non potrebbe h essere più picciolo di $\frac{n-2m}{n}$, se non divenendo negativo, onde ne risultasse la massa negativa, o più che infinita $\frac{n}{-h}$, che non si può dare in natura. Benchè adunque la velocità del corpo $\frac{n}{h}$ sia più tarda di quella, che in egual tempo acquisterebbe sollecitato dalla forza libera $\frac{n}{h}$, e benchè il moto del corpo m derivi dall'azione della detta forza, non ci è veruna ripugnanza, che la sua velocità possa superare, e l'attuale del corpo $\frac{n}{h}$, o anche la maggiore, che in esso risiederebbe, se la forza $\frac{n}{h}$ non sostenesse il contrasto della massa, e della forza m; perchè anche nella circostanza, in cui sia $h < \frac{n-2m}{n}$, la forza viva dei due corpi $\frac{n}{h}$, m, pareggia la differenza fra le azioni, una positiva della forza $\frac{n}{h}$, e l'altra negativa della forza m.

21. Ma sono poi vere le due condizioni poste di sopra, che il fluido per esempio ascendente sia fornito di velocità puramente verticale, e che quella medesima massa liquida, a cui da principio si imprime il moto, seguiti sempre ad accelerarsi? E quanto alla prima, egli è chiaro non potere essa concedersi, qualora si rifletta, che dovendo il fluido scappare al di sotto del corpo solido, e riempiere il sito rimaso vuoto al di sopra, ha necessariamente da muoversi per una strada curva, gli elementi della quale, eccettochè tutti fanno angolo colla direzione verticale. Quindi lo spazio scorso dal fluido esser dee maggiore di hs, e la velocità più grande di hu. Ben è vero, che ciò non porta nella nostra formola $\frac{m-n}{m+hn} \cdot t = u$ alterazione essenziale, bastando per aggiustar la partita aumentar e dovere il coefficiente h.

22. Passo alla seconda condizione, la quale non avverandosi, è cagione che la formola da capo a fondo sconvolgasi. In fatti quando il solido m discende per lo spazio ds,

scaccia

scaccia di luogo, ed imprima moto ad una quantità menoma di fluido, che dianzi era inquieta, ed una pari quantità trasferendosi per direzione a coppia a coppia opposta a riempiere il sito al di sopra rimaso vuoto; per opera di urti contrarj si metta in riposo. Per evitare il paralogismo, fa di uopo porre a computo la forza viva acquistata dalla detta massa infinitesima scacciata di luogo, e primieramente provare, che essa massa è proporzionale a ds.

n. 3. Sia $AgChB$ (fig. 5.) quella parte di solido regolare, ed omogeneo (onde nella discesa non segua verun giramento) la quale spinge fuori di sito il liquore, e scorso da esso solido lo spazio $Ee = ds$, si ritrovi nella positura acb. Si descrivano le linee verticali Aa, Bb. I due volumi ACB, acb sono eguali; dunque sottratto il comun volume gCh, resterà $AghB = agChbca$. Aggiungasi da entrambe le parti lo spazio Aag, Bbh, che cinge all'intorno la porzione del solido $AghB$, ed avremo il prisma $AabB$ uguale al fluido spinto fuori di sito $AgChB.bcaA$: ma il detto prisma, che si eguaglia alla sua base costante moltiplicata in $Ee = ds$, è proporzionale a ds; dunque il fluido scacciato di luogo si riferisce a ds in data ragione.

n. 4. Supposto sferico il corpo $ACBD$, e che il massimo circolo della sfera sia g, ed il suo diametro d, sarà $g.\frac{2}{3}d$ il volume di essa sfera, e qualmente ho testè dimostrato gds il volume di fluido novellamente scacciato di luogo, mentre la sfera discende per lo spazio ds: ma n è la massa di un volume di fluido $= ACBD$; dunque facendo $g.\frac{2}{3}d : gds :: n : \frac{nds}{\frac{2}{3}d}$, si agguaglierà il quarto termine alla massa del predetto volume di fluido.

n. 5. Calcolo adesso la forza viva acquistata dalla massa $\frac{nds}{\frac{2}{3}d}$. Segnata ad arbitrio l'assissa $EL = x$, tiro prima la ordinata $LF = y$, che continuo sino in f, e poscia il raggio $EF = \frac{1}{2}d$, che dee prorogarsi sino in k. Si tagli $LM = dx$, e si conduca l'ordinata MN. La zona $FNPOFN$ della superficie sferica spinge il fluido per una direzione normale agli ele-

menti

menti di essa zona. Per la qual cosa mentre il globo ACBD scorre lo spazio $Ff = ds$, il fluido scacciato dalla mentovata zona passerà lo spazio Fk, e la velocità del globo e del fluido staranno come $Ff : Fk$, o sia come $EF = \frac{1}{2}d : LF = y$. Avremo dunque $\frac{1}{2}d : y :: u : \frac{2yu}{d}$, ed il quarto termine pareggerà la velocità del prodotto fluido, la cui massa è proporzionale ad xdx, agguagliandosi il suo volume alla circonferenza del raggio x moltiplicata in $dxds$, ed essendo ds costante rispettivamente a tutta la zona. Sarà pertanto la forza viva del nostro fluido, messe da parte le quantità costanti, come y^2xdx, ovvero come $\frac{1}{4}d^2xdx - x^3dx$. Passando all'integrazione, scopriremo la forza viva del fluido scacciato dalla porzione di sfera FCOF come $\frac{d^2x^2}{8} - \frac{x^4}{4}$. Non aggiungo costante, perchè ad $x = 0$ corrisponde, come si richiede, la forza viva $= 0$. Fatta $x = \frac{1}{2}d$, la totale forza viva del fluido $\frac{nds}{\frac{2}{3}d}$ starà come $\frac{d^4}{32} - \frac{d^4}{64} = \frac{d^4}{64}$. Se il corpo, che discende, fosse un cilindro, che opponesse al fluido la base uguale al circolo massimo della sfera, e si movesse anch'esso colla velocità u, la forza viva del fluido $\frac{nds}{\frac{2}{3}d}$ sarebbe proporzionale a $\int \frac{d^2}{4}xdx$, quando $x = \frac{1}{2}d$, o sia a $\frac{d^4}{32}$: ma in tale ipotesi la sua forza viva $= \frac{nds}{\frac{2}{3}d} \cdot \frac{u^2}{2}$; dunque nella supposizione del corpo ACBD sferico la forza viva del velo fluido scacciato di luogo $= \frac{nds}{\frac{2}{3}d} \cdot \frac{u^2}{4}$, il che &c. Ella è facile da cavare la conseguenza, che la velocità media, colla quale il fluido è spinto fuori di sito, si agguaglia ad $\frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{u\sqrt{2}}{2} = 0,707107\,u$.

26. Quantunque $\frac{nds}{\frac{2}{3}d} \cdot \frac{u^2}{4}$ sia la forza viva impressa al liquore ultimamente spinto fuori di sito, nulladimeno $\frac{nu^2}{\frac{4}{3}d}$ si può considerare come una forza resistente, che agisca per lo spazio ds, e stia sempre come il quadrato dell'attuale velocità del corpo ACBD. Che un solido, il quale si muove in un fluido, spingendone fuori di sito sempre un nuovo strato, che sfugga prontamente dai lati, sicchè non si replichino gli urti, incontri una resistenza proporzionale al quadrato della velocità, l'ha dimostrato elegan-

temente

tamente il Co. Jacopo mio Padre col mezzo delle leggi della comunicazione del moto nel Tomo III. delle sue Opere pag. 343.

23. Giacchè la forza viva del fluido scacciata novellamente provi di luogo $= \frac{3nu^2 ds}{4d}$ nella supposizione che il corpo ACAD sia elastico, ci si presenterà la formola $\overline{m-n}.ds = \overline{m+hn}.udu + \frac{3nu^2 ds}{4d}$, ovvero $\overline{m-n-\frac{3nu^2}{4d}}.ds = \overline{m+hn}.udu$, la quale si riduce alla seguente forma $ds = \frac{4d.\overline{m+hn}}{3n}.\frac{udu}{\frac{4d.\overline{m-n}}{3n}-u^2}$, ed integrando $s = -\log.\overline{\frac{4d.\overline{m-n}}{3n}-u^2}$ nella logistica della suttangente $\frac{4d.\overline{m+hn}}{3n}$, e prendendo siccome pretonumera la quantità $\frac{4d.\overline{m-n}}{3n}$, di modo che ad $u=0$ corrisponda $s = -\log.\frac{4}{3}d.\frac{\overline{m-n}}{n} = 0$.

24. All'assintoto AF (fig. 6.) colla suttangente $\frac{4d.\overline{m+hn}}{3n}$ si descriva la logaritmica ADG, a cui si adatti l'ordinata $AB = \frac{4d.\overline{m-n}}{3n}$, e tirata BE parallela ad AF, e CE parallela ad AB, sarà $ED = u^2$, $AC = BE = s$. Delineata poscia all'asse BA col parametro eguale all'unità la parabola Apolloniana BKL, e condotta DIK parallela ad EB, si determinerà $IK = u$. La costruzione c'insegna, che $ED = u^2$ non può mai giungere ad agguagliare $AB = \frac{4d.\overline{m-n}}{3n}$ se non dopochè il solido è disceso per uno spazio infinito $AF = s$, nel qual incontro la sua velocità è divenuta equabile. In fatti la velocità nei gravi cadenti dentro di un fluido diventa equabile, ma infinitamente prima, cioè posciachè hanno scorso uno spazio finito; il che si dee attribuire a quella resistenza, che presentemente trascuro.

25. Segno $AH = \frac{4}{3}d.\frac{\overline{m+hn}}{n}$ suttangente della logistica, e condotta la retta HB, toccherà questa la nostra curva nel punto B. Tiro di poi la linea ce infinitamente prossima alla AB, che tagli la curva nel punto d, e delineo dh parallela ad FA. Per i triangoli simili HAB, dhB avremo

$$HA : AB :: dh : hB = ud$$

$$\frac{4}{3}d.\frac{\overline{m+hn}}{n} : \frac{4}{3}d.\frac{\overline{m-n}}{n} :: s : \hat{u} = \frac{\overline{m-n}}{\overline{m+hn}}.s,$$

formola

formola da cui si deduca $\frac{m-n}{m+hn}\cdot s = \frac{u^2}{2}$, ch'è quella espressione, alla quale siamo pervenuti trascurando la forza viva $\frac{3nu^2ds}{4d}$ acquistata dal fluido, che il solido caccia fuori di sito, mentre scorre lo spazio ds, e che a buon conto impariamo aver luogo nel cominciamento del moto. Se la rarità del fluido rendesse rispettivamente minima la forza viva $\frac{3nu^2ds}{4d}$, di modo che fosse $n=0$ adequatamente, allora il protonumero AB, e la suttangente AH diverrebbero infiniti, e la curva BDG si confonderebbe colla tangente BH per un tratto Bd quanto si voglia lungo, purchè finito; laonde in sì fatto incontro la relazione fra gli spazj, e le velocità verrebbe regolata dall'equazione $\frac{m-n}{m+hn}\cdot s = \frac{u^2}{2}$. Questa stessa formola si adempierà fisicamente per uno spazio assai notabile, quando la figura del corpo sia idonea a minorare al possibile la resistenza, ed il fluido molto raro posto al paragone col solido, che discende, come succede nei corpi di marmo, o di metallo, che nell'aria calano abbasso. Anche in questo fluido per altro i corpi più densi finalmente giungono al moto equabile, qualmente l'esperienza ha insegnato.

30. Ripiglio per mano la formola

$$ds = \frac{4}{3}d\cdot\frac{m+hn}{n}\cdot\frac{udu}{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n}-u^2}$$

, e sostituito in vece di ds il suo valore udt, scopro

$$dt = \frac{4}{3}d\cdot\frac{m+hn}{n}\cdot\frac{du}{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n}-u^2},$$

espressione che si può disporre così

$$\frac{\sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{m-n}{n}}\cdot dt}{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m+hn}{n}} = \frac{du}{\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n}}+u} + \frac{du}{\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n}}-u}.$$

Dalla cui integrazione ne ha $t = \log.\left(\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n}}+u\right) - \log.\left(\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n}}-u\right)$ nella logistica della suttangente $\frac{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m+hn}{n}}{\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n}}}$, e presa siccome protonumero la grandezza $\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n}}$, onde ad $u=0$ corrisponda $t=0$.

31. All'assintoto FI (fig. 5) e colla suttangente $\frac{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m+hn}{n}}{\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n}}}$ si delinei la logistica KBDG, e adattato ad

essa

essa il protonumero $AB = \sqrt{\frac{4}{3} d \cdot \frac{m-n}{n}}$, pel punto B si conduca BE parallela ad AF; indi tirisi l'ordinata qualunque CD, che si continui sino in E. Fatta poscia $BL = DE$, si meni LK parallela ad FI, che tagli la curva nel punto K, per cui passi l'ordinata IK; dico essere $ED = u$, $IC = t$. E vaglia il vero, per la costruzione $IK = \sqrt{\frac{4}{3} d \cdot \frac{m-n}{n}} + u$, e conseguentemente $AI = \log. \sqrt{\frac{4}{3} d \cdot \frac{m-n}{n}} + u$; $CD = \sqrt{\frac{4}{3} d \cdot \frac{m-n}{n}} - u$, e perciò $AC = -\log. \sqrt{\frac{4}{3} d \cdot \frac{m-n}{n}} - u$; dunque $IC = \log. \sqrt{\frac{4}{3} d \cdot \frac{m-n}{n}} + u - \log. \sqrt{\frac{4}{3} d \cdot \frac{m-n}{n}} - u = t$, il che &c. Impariamo dalla costruzione, che $ED = u$ non arriva a pareggiare $AB = \sqrt{\frac{4}{3} d \cdot \frac{m-n}{n}}$, salvo che quando il tempo $t = IC$ è divenuto infinito. Per acquistar dunque la velocità equabile $= u = \sqrt{\frac{4}{3} d \cdot \frac{m-n}{n}}$, egli è di uopo che il solido scorra un immenso spazio, e vi impieghi un tempo infinito. Si intenda ciò in rigor matematico: vedremo per altro al num.° 55., che dopo scorso uno spazio più o meno lungo secondo le circostanze, in tempo finito giunge il grave ad una fisica equabilità.

32. Sia $AH = \dfrac{\frac{4}{3} d \cdot \frac{m+hn}{n}}{\sqrt{\frac{4}{3} d \cdot \frac{m-n}{n}}}$, cioè a dire uguale alla suttangente della logistica, onde HA tocchi la curva nel punto B. Tagliate Ac, Ai uguali, ed infinitesime, si conducano le ordinate cd, ik, che intersecheranno (prolungando cd quanto fa di bisogno) la linea EA in e, m. Si tiri in oltre dh parallela ad FI. La similitudine dei triangoli HAB, dhB mi somministra l'analogia

$$BA : AH :: Bh : hd$$

$$\sqrt{\tfrac{4}{3} d \cdot \tfrac{m-n}{n}} : \frac{\frac{4}{3} d \cdot \frac{m+hn}{n}}{\sqrt{\frac{4}{3} d \cdot \frac{m-n}{n}}} :: u : \frac{\frac{4}{3} d \cdot \frac{m+hn}{n} \cdot u}{\frac{4}{3} d \cdot \frac{m-n}{n}},$$

da cui si raccoglie il valore di $hd = Ac = \frac{m+hn \cdot u}{2 \cdot m-n}$: ma per la costruzione $Ac = Ai$; dunque $ic = \frac{m+hn}{m-n} \cdot u = t$, o sia $\frac{m-n}{m+hn} \cdot t = u$, formola, alla quale sono arrivato non mettendo a computo la forza viva $\frac{3nu^2 ds}{4d}$ guadagnata dal fluido spinto fuori di luogo, mentre il solido discende

per

per lo spazio ds. Questa formola dunque si adempie nel principio del moto. Se fosse la massa fluida $n=0$, o almeno assai piccola, sussisterebbe la nostra espressione e matematicamente assegnando a t qualunque valore finito, e fisicamente per un tempo di lunghezza considerabile.

33. L' equazione differenziale $\frac{\frac{4}{3}d \cdot \frac{n-m}{n} - u^2 \cdot dt}{\frac{4}{3}d \cdot \frac{m+hn}{n}} = du$

è adattata ad un solido più leggiero in specie del fluido, nel qual è immerso, che perciò lo spinge all' insù. Sin= tantochè la frazione $\frac{\frac{4}{3}d \cdot \frac{n-m}{n} - u^2}{\frac{4}{3}d \cdot \frac{m+hn}{n}}$ supera l'unità, l'accelerazione del solido, che ascende, eccede quella di un grave cadente nel vano, e queste due accelerazioni diventano uguali, qualora la detta frazione pareggia l'unità. Si effettuerà ciò quando sia $u^2 = \frac{4}{3}d \cdot \frac{\overline{1-h} \cdot n - 2m}{n}$. Se u^2 ha un valor minore, l'accelerazione del nostro solido è maggiore di quella d'un grave, che cade liberamente, e tutto all' opposto succede, se u^2 ha un maggior valore. Acciocchè l'accelerazione, e la velocità del solido ascendente nel fluido siano per qualche tempo più grandi di quelle di un grave, che discende nel vano, egli è di uopo che non solo le vaste superino dall'unità, ma di più sia $\overline{1-h} \cdot n > 2m$; altrimenti il quadrato u^2 della velocità diviene negativo, e la velocità immaginaria, il che dinota essere in tali circostanze impossibile, che il solido, di cui parliamo, si muova più velocemente di un corpo, che cade senza incontrare resistenza veruna.

34. Col mezzo delle due premesse costruzioni si delinea agevolmente la curva, la cui coordinate sono s, t. Si osservi in esse costruzioni quali grandezze di s, e di t corrispondano ad un dato valore di u, e queste si seguino a squadra, onde sia (fig. 6) $AC = s$, $CB = t$, ed il punto B apparterrà alla curva, che si vuol descrivere. In simil guisa si potranno determinare moltissimi

punti

punti della nostra curva ABG; la quale risulterà dalla loro connessione. Abbiamo veduto essere nel principio del moto $\frac{\sqrt{m-n}\cdot 2s}{\sqrt{m+hn}} = u$, $\frac{m-n}{m+hn}\cdot t = u$, e perciò avremo $\frac{2m+2hn}{m-n}\cdot s = t^2$. Si cavi la conseguenza, che la curva ABG nel sito A si confonda con una parabola Apolloniana del parametro $\frac{2m+2hn}{m-n}$.

35. Quando lo spazio AC = s è divenuto infinito, si adempia la formola $s = \sqrt{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n}}\, t$, e quindi tagliata la linea CE colla legge, che sia AC : CE :: $\sqrt{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n}} : 1$, e tirata per i punti A, E l'infinita AD, questa sarà l'assintoto della curva ABG. Per dimostrar ciò con maggiore facilità, nella formola, che esprime la relazione fra il tempo e la velocità, facciamo uso della stessa logistica, e dello stesso protonumero adoprati nella formola dinotante la relazione fra lo spazio e la velocità, onde si abbiano le due formole $s = -\log.\overline{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n} - u^2}$, $\sqrt{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n}}\, t = \log.\overline{\sqrt{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n}} + u} - \log\overline{\sqrt{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n}} - u}$. La velocità sia pervenuta ad una grandezza infinitamente prossima a quella $\sqrt{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n}}$, che le compete, quando s, e t siano assolutamente infiniti. Pongasi adunque $u = \sqrt{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n}} - dx$, e sostituito questo valore in ambo le formole, troveremo $s = -\log. 2dx\sqrt{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n}}$, $\sqrt{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n}}\cdot t = \log. 2\sqrt{\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{m-n}{n}} - \log. dx$. Nella formola del tempo il primo logaritmo è finito, ed incomparabile col secondo infinito, laonde si può cancellare. Ora io dico essere $-\log. 2dx\sqrt{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n}} = -\log. dx$, e per conseguenza $s = \sqrt{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n}}\cdot t$. E' veglia il vero nella logistica ella è finita la linea intercetta fra le due ordinate $2dx\sqrt{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n}}$, dx, che si corrispondono in ragione di $2\sqrt{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n}} : 1$, e perciò le due assisse infinite $-\log. 2dx\sqrt{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n}}$, $-\log. dx$, la cui differenza è finita, sono fra loro eguali, e quindi si avvera la formola $s = \sqrt{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n}}\cdot t$, come si dovea dimostrare.

36. A cagione di porre la stabilita teorica al cimento

dalla

dalla sperienza, egli è necessario l'andare in traccia della formola, che contenga le due incognite s, t, della quale ho data or ora la costruzione. Ma perchè in essa ci entrano i logaritmi, per ridurli a computo, bisogna valersi della logistica delle tavole, la cui suttangente $a =$ 0,434294419..., e supporre siccome protonumero l'unità. Facendo uso della logistica, e del protonumero mentovati, la formola dello spazio, e del tempo riferiti alla velocità sopra determinate nei num.ri 27, e 34 prendono il seguente aspetto $\frac{2as}{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m+hn}{n}} = \log\left(\frac{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n}}{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n}-u^2}\right)$;

$\frac{2at\sqrt{mn-n^2}}{\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\overline{m+hn}^2}} = \log\left(\frac{\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n}}+u}{\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n}}-u}\right)$. Per facilitare il calcolo pongo $\frac{4}{3}d\cdot\frac{m+hn}{n} = F$, $\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n} = B^2$, $\frac{\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\overline{m+hn}^2}}{\sqrt{mn-n^2}} = G$, e ne risultano le due equazioni $\frac{as}{F} = \log\left(\frac{B^2}{B^2-u^2}\right) = \log\left(\frac{B^2\cdot\overline{B+u}}{\overline{B+u}^2\cdot\overline{B-u}}\right)$ $= \log\left(\frac{B+u}{B-u}\right) + 2\log B - 2\log\overline{B+u}$, $\frac{2at}{G} = \log\left(\frac{B+u}{B-u}\right)$. Cerco nella seconda il valore di u, e giacchè $c^{\frac{2at}{G}} = \frac{B+u}{B-u}$ (c è quel numero, il cui logaritmo eguaglia l'unità, ed un tal numero è il dieci nella logaritmica delle tavole) dopo i necessarj computi trovo $B+u = \frac{2Bc^{\frac{2at}{G}}}{c^{\frac{2at}{G}}+1}$. Nella prima equazione sostituisco in cambio di $\log\left(\frac{B+u}{B-u}\right)$, e di $B+u$ i loro valori, e mi si presenta $\frac{as}{F} = \frac{2at}{G} + 2\log B + 2\log\left(\frac{c^{\frac{2at}{G}}+1}{2Bc^{\frac{2at}{G}}}\right)$, o sia $\frac{as}{2F} = \frac{at}{G} + \log B + \log\left(\frac{c^{\frac{2at}{G}}+1}{2Bc^{\frac{2at}{G}}}\right)$ $= \frac{at}{G} - \log 2 + \log\left(\frac{c^{\frac{2at}{G}}+1}{c^{\frac{2at}{G}}}\right)$, e finalmente

$s = \frac{2Ft}{G} - \frac{2F}{a}\log 2 + \frac{2F}{a}\log\left(\frac{c^{\frac{2at}{G}}+1}{c^{\frac{2at}{G}}}\right)$. Riponendo in vece di F, e di G i loro valori, ne proverrà $s =$ $t\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n}} - \frac{4}{3}d\cdot\frac{m+hn}{an}\cdot\log 2 + \frac{4}{3}d\cdot\frac{m+hn}{an}\log\left(\frac{c^{\frac{2at\sqrt{mn-n^2}}{\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\overline{m+hn}^2}}}+1}{c^{\frac{2at\sqrt{mn-n^2}}{\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\overline{m+hn}^2}}}}\right)$.

37. Conciossiachè io voglia valermi di alcuna sperienza del Cavalier Newton contenuta nello Scolio dopo la Proposizione XL. del Libro II. de' suoi Principj Matematici

dalla

della Filosofia Naturale, egli è necessario ch'esprima il tempo in minuti secondi, e lo spazio in pollici del piede di Londra. Fatta la riflessione, che un grave nel vano scorre in un minuto secondo pollici 193 $\frac{1}{3}$ del piede suddetto, si moltiplichi il tempo t per $\sqrt{346\frac{2}{3}}$, e ciò fatto si verificherà che il tempo, e lo spazio si esprimano, quello col numero dei minuti secondi, e questo col numero dei pollici del piede di Londra. Si avrà pertanto

$$s = t\sqrt{\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m-n}{n}\cdot 346\tfrac{2}{3}} - \tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m+hn}{n}\cdot\tfrac{\log .2}{a} +$$

$$\tfrac{4}{3}d\cdot\tfrac{m+hn}{an}\cdot\log\left(\frac{e^{\frac{2at\sqrt{mn-n^2\cdot 346\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\overline{m+hn}^2}}}+1}{e^{\frac{2at\sqrt{mn-n^2\cdot 346\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\overline{m+hn}^2}}}}\right)$$

espressione, che va d'accordo con quella, a cui perviene il Newton nella citata Proposizione, purchè si ponga $h=0$. Nelle sperienze, che sono per riferire, l'ultimo termine dell'omogeneo di comparazione riesce tanto piccolo, che può trascurarsi; e quindi sostituendo in luogo di log. 2, e di a i loro valori, ne risulterà finalmente in riguardo ad esse sperienze $s = t\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n}\cdot 346\frac{2}{3}} -$ $1,3462943611\cdot\frac{4}{3}d\cdot\frac{m+hn}{n}$.

34. Preparò il lodato Scrittore un vaso di legno lungo, e largo internamente nove dita del piede di Londra e profondo piedi nove e mezzo, o sia dita 114; e lo riempì di acqua piovana. Avendo formati dei globi con cera e piombo in essa inchiuso, notò i tempi della loro discesa dall'altezza di dita 112. Un piede solido cubico di Londra contiene 76 libre Romane di acqua piovana, un dito solido di questo piede contiene $\frac{19}{36}$ di oncia, o sia grani 253 $\frac{1}{3}$ della stessa libra, ed un globo acqueo di diametro di un dito pesa nell'aria grani 132,645, e nel vacuo grani 132,6. Avverto che bisogna inserire il piombo dentro la cera in un sito vicino alla superficie della palla, e collocar questa in maniera

dentro

dentro dell'acqua, che il detto sito sia il più basso, onde nel discendere non segua in essa palla verun giramento, il quale ritarderebbe il suo moto. Egli è di uopo inoltre non dare qualsisia minimo impulso alla palla, quando si lascia cadere.

39. Esperienza I. Un globo, il cui peso era di grani $1561\frac{1}{4}$ nell'aria, e 77 grani nell'acqua, descrisse nel tempo di quattro secondi la totale altezza di pollici 112. Ripetuto l'esperimento, cadde nuovamente il globo nel tempo stesso $t = 4''$.

Il peso del globo nel vacuo era di grani $1561\frac{13}{34} = \frac{53941}{34} = m$, e nell'acqua = grani 77 = $m-n$, e quindi la massa d'un globo di fluido di pari diametro = grani $79\frac{13}{34} = \frac{3015}{34} = n$, d'onde ne risulta il diametro del globo $d = 0,84224$ parti di dito. Sostituiti nella nostra formola questi valori, si trova il primo termine dell'omogeneo di comparazione $t\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n}{n}\cdot 386\frac{2}{3}}$ = poll. 116,1245. Se nel secondo termine si supponga $h=0$, si scoprirà esso = poll. 3,0676; e quindi ne proverrà s = poll. 116,1245 − poll. 3,0676 = poll. 113,0569, spazio che il globo dovrebbe scorrere in un vaso sommamente ampio, prescindendo da qualsivoglia altra resistenza. Avendo passati soltanto poll. 112, debbe ciò attribuirsi quasi interamente a quelle resistenze, che si sono trascurate, e pressochè nulla alla ristrettezza del vaso, la quale non può permettere che si faccia $h=0$, di modo che discendendo la palla m, innalzi essa la gravità infinita di fluido $= \frac{n}{0}$. Quando si alzi tutta quella quantità di acqua, che la capacità del vaso comporta, il valore di h riesce talmente picciolo, che non ne nasca nella misura dello spazio s notabile alterazione.

40. Si troverebbe s = poll. 112 determinando $h = 0,67489$: ma la palla viene certamente ritardata dal fregamento, e dalla viscosità; dunque ad h dee compararsi una minore grandezza. Si inferisca non avverarsi

fi

l'opinion di mio Padre, che h pareggi l'unità, di modo che al discendere dal solido m, si sollevi in alto un pari volume di fluido, la cui massa = n. Quale sia il vero valore di h, m'ingegnerò di determinarlo al num.ro 50.

41. Per internarmi via più nella presente materia, cerco nella supposizione di h = 0 la resistenza costante r, che produrrebbe nel corpo m lo stesso ritardamento cagionato dalla resistenza, che nella formola ho trascurato. Prenderà dunque essa formola il presente aspetto $s = t\sqrt{\frac{4}{3}d \cdot \frac{m-n-r}{n} \cdot 346\frac{2}{3}} - 1,3460294360 11 \cdot \frac{4}{3}d \cdot \frac{m}{n}$, e giacchè s = poll. 112, ed il secondo termine dell'omogenee di comparazione = poll. 3,06706, sarà $t\sqrt{\frac{4}{3}d \cdot \frac{m-n-r}{n} \cdot 346\frac{2}{3}}$ = poll. 115,06706, equazione, da cui si deduce $r = m - n - \frac{n \cdot \overline{115,06706}^2}{t^2 \cdot \frac{4}{3}d \cdot 346\frac{2}{3}}$. Sostituiti i valori somministrati dalla prima esperienza troveremo r = 1,3954.

42. Esperienza 2.a Tre globi, il peso di ciascun dei quali era nell'aria di grani $76\frac{1}{3}$, e nell'acqua di grani $5\frac{1}{16}$, si lasciavano successivamente cadere dall'altezza di pollici 112 dentro il predetto fluido, ed ognuno v'impiegò il tempo di 15 minuti secondi = t.

Il peso di ogni globo nel vacuo era di grani $76\frac{5}{12}$ = $\frac{3664}{48}$ = m, il peso nell'acqua = grani $5\frac{1}{16}$ = $\frac{243}{48}$ = m − n, e perciò n = grani $71\frac{17}{48}$ = $\frac{3425}{48}$, ed il diametro d = 0,51296. La sostituzione di questi valori determina $t\sqrt{\frac{4}{3}d \cdot \frac{m-n}{n} \cdot 346\frac{2}{3}}$ = 115,6734, e ponendo h = 0, $1,3460294360 11 \cdot \frac{4dm}{3n}$ = 1,609. Il perchè s = 114,069, spazio, che il globo avrebbe dovuto passare senza l'impedimento della resistenza, che non si sono considerate. Avendo scorso soltanto lo spazio s = 112, la diminuzione di poll. 2,069 fu cagionata dalla predetta resistenza.

43. Ne risulterebbe s = poll. 112 ponendo h = 1,37644. Ed infatti se si vuole con tal mezzo aggiustar la partita; dee

dee avverarsi l'equazione $1{,}3\,4\,6\,2\,9 \cdot 4{,}3\,611 \cdot \frac{4dh}{3} = 2{,}069$, e conseguentemente $h = \frac{6{,}207}{1{,}3\,4\,6\,2\,9 \cdot 4{,}3\,611 \cdot 4d} = \frac{6{,}207}{4{,}504} = 1{,}37644$. Questo valore di h è troppo grande, nè può aver luogo, perchè esclude l'altre resistenze di fregamento, e di viscosità, le quali presso che interamente producono il ritardamento di poll. 2,069. Andiamo dunque in traccia nell'ipotesi di h = 0 della resistenza costante equivalente alle date resistenze:

44. Avremo pertanto $s = 112 = t\sqrt{\frac{4}{3}d \cdot \frac{m-n-r}{n} \cdot 366}^{\frac{2}{3}} - 1{,}3\,4\,6\,2\,9 \cdot 4{,}3\,611 \cdot \frac{4}{3}d \cdot \frac{m}{n}$, e poichè il secondo termine dell'omogeneo di comparazione $= 1{,}609$, ne proverrà $t\sqrt{\frac{4}{3}d \cdot \frac{m-n-r}{n} \cdot 366}^{\frac{2}{3}} = 113{,}609$, e perciò $r = m-n-n \cdot \frac{\overline{113{,}609}^2}{t^2 \frac{4}{3}d \cdot 366^{\frac{4}{3}}} = 0{,}1795$, sostituiti in cambio di m, n, d, t i competenti valori, ed effettuati i computi necessarj.

45. Il superare il fregamento, e la viscosità si rende tanto più difficile, quanto è maggior la pressione. Sia HI (Fig. 9.) l'altezza dell'acqua dentro del vaso, e si supponga che nel primo istante della discesa il punto C della palla ACAD coincidesse col punto G, di modo che sia essa calata abbasso per lo spazio GC = s. Sia in oltre il diametro DC = d, HG = b > d, acciocchè nel cominciamento del moto la sfera fosse tutta immersa nel fluido, $EL = x$, $LF = y = \sqrt{\frac{1}{4}d^2 - x^2}$, e la circonferenza circolare, il cui raggio EL = EM = x, eguale a kx. Segnato il minimo archetto $FN = \frac{1}{2}\frac{d \cdot dx}{y}$, egli è noto che la superficie della zona FNPOFN s'agguaglia alla grandezza $kx \cdot \frac{\frac{1}{2}d\,dx}{y} = \frac{\frac{1}{2}dkx\,dx}{y}$, e questa superficie soffre la pressione proporzionale all'altezza del fluido $HM = HG + GC - CE + EM = b + s - \frac{1}{2}d + y$. Avremo dunque la detta pressione come $\overline{b+s-\frac{1}{2}d+y} \cdot \frac{\frac{1}{2}dkx\,dx}{y} = \overline{b+s-\frac{1}{2}d} \cdot \frac{\frac{1}{2}dkx\,dx}{y} + \frac{1}{2}dkx\,dx = \overline{b+s-\frac{1}{2}d} \cdot \frac{\frac{1}{2}dkx\,dx}{\sqrt{\frac{1}{4}d^2-x^2}} + \frac{1}{2}dkx\,dx$. L'integrazione ci darà la pressione del segmento sferico FCOMF proporzionale alla quantità $\frac{1}{4}dkx^2 - \overline{b-s+\frac{1}{2}d} \cdot \frac{1}{2}dk\sqrt{\frac{1}{4}d^2-x^2} + B$. Si determina

termina la costante B riflettendo, doversi annullar la somma delle pressioni, posta $EL = x = 0$. Il perchè scopriremo $B = \overline{b + s - \frac{1}{2}d} \cdot \frac{1}{4}d^2 k$, e conseguentemente la pressione del detto segmento sferico come $\frac{1}{4}d^2 k . x^2 + \overline{b + s - \frac{1}{2}d} \cdot \frac{1}{4}d^2 k - \frac{1}{2}dk\sqrt{\frac{1}{4}d^2 - x^2}$, e giunta che sia x a pareggiare $EA = \frac{1}{2}d$, la pressione dell'emisferio $AFCOBA$ come $\frac{1}{4}d^2 k \cdot \overline{b + s - \frac{1}{4}d}$. Si noti che la quantità $\frac{1}{4}d^2 k = \frac{1}{2}dk . \frac{1}{2}d$ si eguaglia alla superficie dell'emisferio, ch'è doppia di quella del circolo generatore, e per conseguenza la detta superficie sostiene una somma di pressioni proporzionale all'altezza del fluido $b + s + \frac{1}{4}d$ media aritmetica fra le due $b + s = HC$, $b + s - \frac{1}{2}d = HE$.

46. Ci si manifesterà la pressione assoluta della nostra semisfera, riflettendo che n è la massa, o sia il peso d'un volume di fluido $= \frac{1}{6}d^2 k \cdot \frac{2}{3}d = \frac{1}{4}d^2 k \cdot \frac{1}{3}d$. Paragonando ora le due quantità $\frac{1}{4}d^2 k \cdot \frac{1}{3}d$, $\frac{1}{4}d^2 k \cdot \overline{b + s - \frac{1}{4}d}$ riferite ad una base comune $\frac{1}{4}d^2 k$, col mezzo dell'analogia

$\frac{1}{4}d^2 k \cdot \frac{1}{3}d : n :: \frac{1}{4}d^2 k \cdot \overline{b + s - \frac{1}{4}d} : n \cdot \dfrac{\overline{b + s - \frac{1}{4}d}}{\frac{1}{3}d}$, scopriremo l'aggregato delle pressioni della semisfera $AFCOBA = 3n \cdot \dfrac{\overline{b + s - \frac{1}{4}d}}{d}$.

47. Ma non è questa sola la pressione sofferta dall'emisferio. La resistenza $\dfrac{nu^2}{\frac{4}{3}d}$, di cui ho parlato al num.^{ro} 26, spinge all'insù l'emisferio, e perciò la sua pressione è per tale grandezza aumentata. Torno a prender per mano l'equazione prima contenuta nel num.^{ro} 36, onde si abbia $\dfrac{nas}{\frac{4}{3}d \cdot \frac{m + hn}{n}} = \log. \left(\dfrac{\frac{4}{3}d \cdot \frac{m - n}{n}}{\frac{4}{3}d \cdot \frac{m - n}{n} - u^2} \right)$, o sia, facendo

$\frac{4}{3}d \cdot \frac{m + hn}{n} = F$, $\frac{4}{3}d \cdot \frac{m - n}{n} = B^2$, $\frac{as}{F} = \log. \dfrac{B^2}{B^2 - u^2}$, e passando dai logaritmi ai numeri $c^{\frac{as}{F}} = \dfrac{B^2}{B^2 - u^2}$, e finalmente $B^2 - \dfrac{B^2}{c^{\frac{as}{F}}} = u^2$, o sostituendo i loro valori in cambio di B^2, e di F, $\frac{4}{3}d \cdot \frac{m - n}{n} - \dfrac{\frac{4}{3}d \cdot \frac{m - n}{n}}{c^{\frac{ans}{\frac{4}{3}d \cdot m + hn}}} = u^2$. Per la qual cosa sarà la pressione di cui parliamo, cioè $\dfrac{nu^2}{\frac{4}{3}d} = m - n - \dfrac{(m - n)}{c^{\frac{ans}{\frac{4}{3}d \cdot m + hn}}}$, e volendo

esprimere

esprimere il tempo t in minuti secondi, e lo spazio s in pollici del piede di Londra, $= m-n \dfrac{-(m-n)}{e^{\frac{4}{3}d \cdot 3600 \frac{a}{3} \cdot mnhn}}$ . . .

Questa pressione nella descritta sperienza, ed in quella che sono per riferire, riesce talmente piccola rispettivamente all'altra determinata nel precedente num.ro 46, ch'io ben volentieri la trascuro, a fine massimamente della maggior facilità dei calcoli.

48. . . . Sarà pertanto la pressione dell'emisferio AFCOBA $= 3n \cdot \overline{\frac{b+s-\frac{1}{4}d}{d}}$, a cui ha da essere proporzionale la resistenza nascente dal fregamento, e dalla viscosità. Giacchè in essa sperienza l'altezza dell'acqua era di pollici 114, ed i globi discendevano dall'altezza di pollici 112, ne risulta $b=2$. La resistenza nascente dalla viscosità, e dal fregamento, la qual è proporzionale alla total pressione sostenuta dall'emisferio, replica i suoi sforzi tante volte, quanti elementi ds si contengono nello spazio s. Il perchè l'azione della resistenza predetta seguirà la ragione di $\int 3n \cdot \overline{\frac{b-\frac{1}{4}d}{d}} \cdot \overline{ds + s\,ds} = 3n \cdot \overline{\frac{b+\frac{1}{2}s-\frac{1}{4}d}{d}} \cdot s$. Assegnato ad s il final valore $=$ poll. 112, la stessa azione verrebbe esercitata da una forza proporzionale a $3n \cdot \overline{2+56-\frac{1}{4}d}$, che agisse per lo spazio $s=112$. Alla trovata grandezza adunque sarà proporzionale una forza media costante equivalente alla resistenza della viscosità e del fregamento. Per la prima esperienza abbiamo $3n \cdot \overline{\frac{b+\frac{1}{2}s-\frac{1}{4}d}{d}} = 16331,933$, e per l'esperienza seconda $3n \cdot \overline{\frac{b+\frac{1}{2}s-\frac{1}{4}d}{d}} = 15810,208$. Si inferisca, che la proporzione fra le due resistenze medie ha da essere come $1,03331 : 1$, e così dovrebbero riferirsi i due valori di v nelle mentovate sperienze, i quali nell'ipotesi di $h=0$ si sono trovati come $1,3954 : 0,1395$, o come $3,3334 : 1$. Dipende questo divario dalla falsa supposizione di $h=0$. Procuriamo dunque di stabilire h di tale grandezza, che i due valori della resistenza media v si corrispondano nelle due riferite sperienze come $1,03331 : 1$.

49. Ho testé osservato, che posta $h = 0$, i due valori di v rispettivamente agli esperimenti primo, e secondo stanno come 3,7734 : 1. Chi facesse $h = 0,67449$ come al n.ro 40, troverebbe nel primo esperimento $v = 0$, e nel secondo v uguale ad una data grandezza, richiedendosi acciocché v si annulli $h = 1,3.7 6.44$, sopra di che veggasi il n.ro 43. Per ottenere dunque, che i due valori di v si riferiscano nella stabilità ragione media di 1,07371 : 1, egli è d'uopo assegnare ad h una grandezza media fra il nulla, e 0,67449. Ecco il metodo, di cui mi servo.

50. Alla prima esperienza serve la formola $s = t\sqrt{\frac{4}{3}d \cdot \frac{m-n-v}{n} \cdot 3466\frac{2}{3} - 1,3462943611 \cdot \frac{4}{3}d \cdot \frac{m}{n} + h}$, ed alla seconda l'altra formola $s = T\sqrt{\frac{4}{3}D \cdot \frac{M-N-R}{N} \cdot 3466\frac{2}{3} - 1,3462943611 \cdot \frac{4}{3}D \cdot \frac{M}{N} + h}$, nella quale ho scritta minuscola la lettera s, h, perché il globo cada dalla stessa altezza $s = 112$ in tutti e due i casi, e perché in ambe le sperienze il coefficiente h aver dee il medesimo valore. Dovendo stare $v : R :: 1,07371 : 1$, ne risulta $v = 1,07371 R$. Fatta la sostituzione nella prima formola, ci si presenterà $s = t\sqrt{\frac{4}{3}d \cdot \frac{m-n-1,07371R}{n} \cdot 3466\frac{2}{3} - 1,3462943611 \cdot \frac{4}{3}d \cdot \frac{m}{n} + h}$. Abbiamo pertanto due equazioni, e due incognite R, h, i cui valori col metodo si scopriranno, sostituiti prima in cambio delle lettere i competenti valori dalle sperienze somministrati. Il calcolo riuscirà sommamente lungo e tedioso, e finalmente si scoprirà $h = 0,62794$, $R = 0,094015$, $v = 1,07371 R = 0,10529$.

51. Ho avvertito al n.ro 25, che la velocità media, colla quale il fluido $\frac{nds}{\frac{2}{3}d}$ è scacciato fuori di luogo, si agguaglia a 0,707107 u. Ora essendo $hu = 0,62794 u$ la mezzana velocità, con cui si alza il fluido, mentre il globo discende, e traendo questa l'origine da quella del solo $\frac{nds}{\frac{4}{3}d}$ spinto fuori di sito mediante innumerabili comunicazioni di moto, nelle quali qualche cosa si dee perdere di velocità,

si

si vede chiaramente il perchè la velocità del fluido, che si alza, sia minore di quella del fluido $\frac{n\,ds}{\frac{2}{3}d}$ cacciato fuori di luogo nel minimo tempo dt.

52. La esperienza 3.ª del Cav. Newton pochissimo favorevole alla sua teorica confermerà maggiormente la mia, da cui molto meno discostasi.

Esperienza 3. Tre globi eguali ognuno pesante grani 121 nell'aria, e grani 1 nell'acqua si lasciavano successivamente cadere dall'altezza di pollici 112 = s, e vi impiegavano i tempi 46'', 47'', e 50''. Il peso di ogni globo nel vacuo si trova col computo 121,292170432 = m, e giacchè m − n = 1, ne risulta n = 120,292170432. Essendo i diametri delle sfere della stessa materia come la radice cubica dei pesi, se il peso 132,4 di una sfera di acqua corrisponde al diametro di poll. 1, al peso 120,292170432 si riferirà il diametro d = 0,9702.

La pressione media, a cui è proporzionale la resistenza nascente dal fregamento, e dalla viscosità, cioè $3n\cdot\frac{b+\frac{1}{2}s-\frac{1}{4}d}{d}$ la scopriremo uguale a 21443,53435. Poichè questa nella prima esperienza si eguagliava a 16331,933, e la resistenza media a 0,105239, facciasi 16331,933 : 21443,53435 :: 0,105239 : 0,136435 = v valore della resistenza media nella terza esperienza. In oltre conforme a quanto si è stabilito al num.ro 50., h = 2,62794.

Sostituiti i convenienti valori nella formola

$$\frac{s+1,3462943611\cdot\frac{4}{3}d\cdot\frac{m}{n}+h}{\sqrt{\frac{4}{3}d\cdot\frac{m-n-v}{n}\cdot 346\frac{2}{3}}} = t\text{, troveremo}$$

t = 42,9372''. La teorica del Cav. Newton determina t = 40'', e quindi la mia formola notabilmente più alla sperienza si accosta.

53. Indagando la causa, per cui globi dello stesso peso, e della stessa grandezza cadevano alcuni più presto, alcuni più tardi, e specialmente quando il loro peso nell'acqua era picciolissimo, ci spendevano più tempo di quello richiede

la

la mia teorica, si può riflettere, che non sono essi talmente regolari, che nell'atto di discendere non concepiscano una specie di giramento, e di oscillazione, la quale quanto sarà maggiore, tanto più ritarderà il moto della discesa. Il predetto giramento fa che si accostino alla sponda del vaso, e se in esse urtano, il ritardamento è tanto più grande. Che se il peso nell'acqua è assai piccolo, il poco piombo inserito nel sito più basso non impedisce un considerabile bilanciamento, e la tortuosità della discesa. Si aggiunga, che anche l'acqua stagnante è sempre fornita di qualche moto, il quale al discendere d'un grave leggierissimo reca non trascurabile disturbo. Benchè l'aria sia quieta sensibilmente, veggiamo tutto giorno quanto irregolarmente una penna discenda. Egli è dunque necessario, che il peso del globo nell'acqua sia di più grani, acciocchè l'esperimento vada d'accordo colla mia formola.

54. Esperienza 4. Apprestò il Sig. Newton un vaso di legno largo internamente pollici $8\frac{2}{3}$, e profondo piedi $15\frac{1}{3}$ = pollici 184. Formò poscia con cera e piombo quattro palle ognuna pesante grani $139\frac{1}{4}$ nell'aria, e grani $7\frac{1}{8}$ nell'acqua, e queste lasciò cadere dall'altezza di pollici $182 = s$, misurando il tempo con un pendolo a semisecondi. Replicata più volte l'esperienza, si contarono oscillazioni 49, $49\frac{1}{2}$, 50, 51, e 53, ma la maggior parte delle volte s'impiegarono il tempo di oscillazioni $49\frac{1}{2}$, o 50. I tempi più brevi si debbono attribuire ad un qualche impulso dato alla palla nel principio del moto, ed i più lunghi al giramento, ed all'urto nei lati del vaso.

Il peso del globo nel vacuo era di grani $139\frac{2}{5}$ $= 139,4 = m$, $m-n = 7\frac{1}{8} = 7,125$, $n = 132,275$, $d = 0,99868$, $b = 2$, $s = 182$. La pressione media, a cui è proporzionale la resistenza prodotta dal fregamento, e dalla viscosità $= 3n \cdot \frac{\overline{b+\frac{1}{2}s}\,\overline{s-\frac{1}{4}d}}{d}$ la troveremo $= 36854,297$. Eguagliandosi questa nella prima esperienza

rienza a 16331,933; e la resistenza media a 0,10529, col mezzo dell'analogia 16331,933 : 36854,297 :: 0,10529 : 0,237480 = r ci si manifesterà il valore della resistenza media confacente alla quarta sperienza. Si ponga il coefficiente $h = 0,62794$ qualmente ho determinato al nu.ro 50.

Fatta la sostituzione dei competenti valori nella formola: $\frac{s + 1,3862943611 \cdot \frac{4}{3}d \cdot \frac{m}{n} + h}{\sqrt{\frac{4}{3}d \cdot \frac{m-n-r}{n} \cdot 386\frac{2}{3}}} = t$, si trova $t = 25', 27887''$, valore che corrisponde agli esperimenti con quella maggior approssimazione, che può ottenersi nelle presenti ricerche.

55. Ho promesso nel nu.ro 31. di far vedere, che la velocità d'un grave discendente dentro un fluido si accosta tanto alla massima dopo che il grave stesso ha corso uno spazio più o meno grande secondo le circostanze, che giunge ad esser equabile fisicamente. Se nella sovrascritta formola dei tempi riferiti agli spazj il termine $1,3862943611 \cdot \frac{4}{3}d \cdot \frac{m}{n} + h$ fosse trascurabile rispettivamente ad s, si moverebbe il corpo m colla massima equabile velocità $\frac{s}{t\sqrt{386\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{4}{3}d \cdot \frac{m-n-r}{n} \cdot 386\frac{2}{3}}$. Vediamo quanto si accosti alla massima la velocità del globo, quando nella quarta esperienza ha percorso lo spazio di pollici 182. Nella detta esperienza sostituendo gli stabiliti valori si trova $1,3862943611 \cdot \frac{4}{3}d \cdot \frac{m}{n} + h = 3,1035132776$; $\sqrt{\frac{4}{3}d \cdot \frac{m-n-r}{n} \cdot 386\frac{2}{3}} = 7,3225$. Discenda la sfera dall'altezza di pollici 181, e vi impiegherà il tempo $t = \frac{184,1035132776}{7,32248} = 25', 14223''$: ma nel viaggiare per pollici 182 vi spendeva il tempo $25', 27887''$; dunque nel passare l'ultimo pollice si consuma il tempo $0,13664''$. E conciossiaché esso pollice si scorra con velocità fisicamente equabile, sarà la detta velocità $= \frac{s}{t\sqrt{386\frac{2}{3}}} = \frac{1}{0,13664\sqrt{386\frac{2}{3}}} = 7,3185$, la quale si accosta moltissimo alla massima $= 7,3225$, riferendosi ad essa prossimamente come 1830 : 1831.

57

Si inferisca, che nella questa esperienza il mobile è giunto ad acquistare una velocità fisicamente equabile dopo aver camminato lo spazio di pollici 16.a.

56. Finisco coll'aggiungere alcune poche riflessioni intorno alla controversia fra il P. Ab. D. Guido Grandi, ed il Co. Jacopo Riccati mio Padre. Se non ci fossero resistenze, dalle quali e l'uno, e l'altro prescindeva, si avvererebbe la formola $\frac{m-n}{m+hn}\cdot t = u$, e per conseguenza ancor la seguente $t = \sqrt{\frac{2m+2hn}{m-n}\cdot s}$, che nasce dal sostituire $\frac{ds}{dt}$ in cambio di u, purchè si ponga $h = 0{,}62794$, valore da me determinato nel num.ro 50. Quantunque il P. Ab. Grandi, e mio Padre non abbiano colto nel vero, supponendo quegli $h = 0$, e questi $h = 1$; nulladimeno si accosta più al giusto il secondo del primo, massimamente che dalla ipotesi del Co. Jacopo deriva, che discendendo il corpo m, s'alzi un volume di fluido pari a quello del solido, e dall'ipotesi dell'Ab. D. Guido, che il grave in faccia salire in alto un infinito volume di fluido, la cui massa $= \frac{n}{h} = \frac{n}{0}$. Si richiami a memoria quello che ho scritto dal num.ro 9. sino al num.ro 16. inclusivamente.

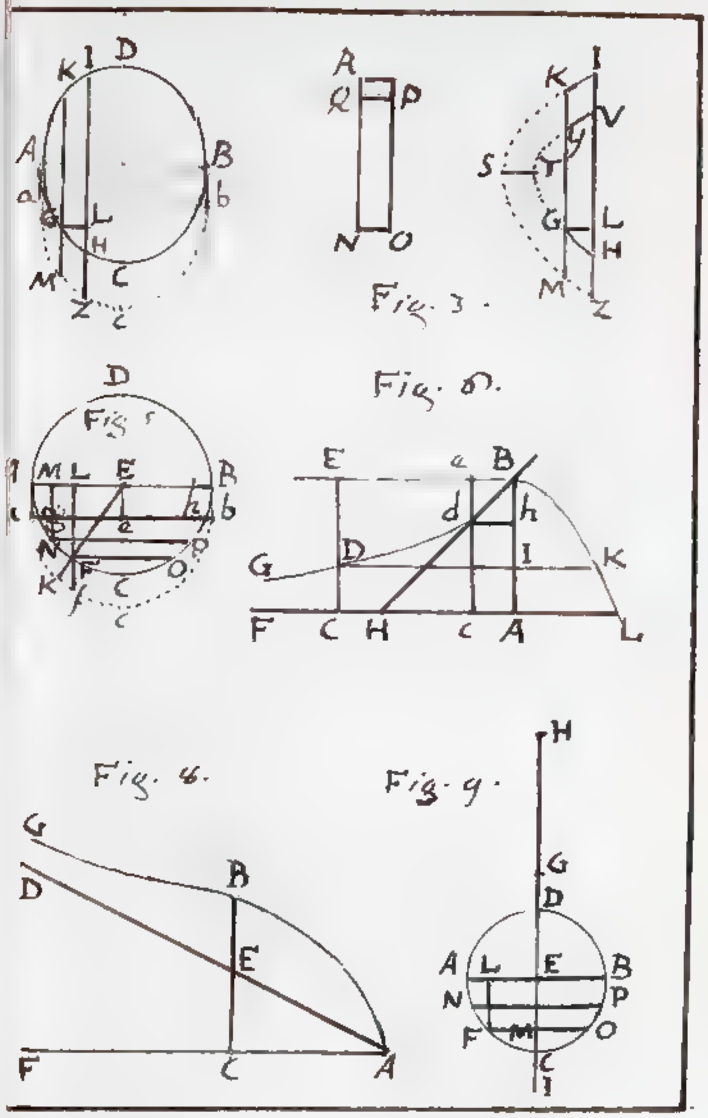


Fig. 3.
Fig. 9.

Dei tre Generi di Resistenze,
che nascono dall' inerzia della materia,
e ritardano il moto dei corpi solidi
dentro dei mezzi fluidi,
Dissertazione Fisico-matematica del
Signor Co. Giordano Riccati
contenuta nel Tomo V. della Raccolta
Ferrarese ecc. In Vinegia 1780 pag. 67.

(1) Saggio intorno il Sistema dell' Universo, cap. [illegible] pag. 112. e seguenti

Dei due Generi di Resistenze, che nascono dall'inerzia della materia, e ritardano il moto dei corpi solidi dentro dei mezzi fluidi,

Dissertazione Fisico-Matematica del Signor Co. Giordano Riccati.

1. Siccome si danno due specie di forza, cioè la continuamente applicata o assoluta, e l'acceleratrice, che si agguaglia alla forza assoluta divisa per la massa posta in moto dall'azione di essa forza; così egli è d'uopo ammettere due generi di resistenza, vale a dire la continuamente applicata o assoluta, e la ritardatrice, che trae l'origine dal dividere la resistenza assoluta per la massa ritardata. Se la massa, di cui si considera il ritardamento, è costante, le resistenze dei due generi sono simili, corrispondendo l'assoluta alla ritardatrice come la massa costante ritardata all'unità.

2. Il Co. Jacopo Riccati mio padre ha ristretto dentro i due limiti del quadrato, e del cubo dell'attuale velocità di un corpo le resistenze nascenti dall'inerzia della materia, che sarebbero atte a ritardarlo nel vano in quella stessa guisa, che viene effettivamente ritardato nel pieno (1.). Si muova un corpo attraverso di un fluido, e se imprimerà velocità sempre ad un nuovo strato di esso fluido, che ceda prontamente dai lati, la resistenza sarà proporzionale al quadrato della velocità.

3. Ecco il metodo da lui tenuto. Ci sia il solido m, fornito da principio della velocità $= b$, il quale dopo scorso lo spazio orizzontale s abbia scacciato di luogo il fluido ns, che si sia speditamente sottratto di parte, e d'altra. In tal momento movendosi il corpo colla velocità residua u per lo spazietto ds, urti nello strato liquido nds: considera il Co. Jacopo, che segue comunicazione di moto fra le due masse m, nds. Se questa si effettui colle leggi dei corpi molli, avremo dopo la percossa la velocità comune alle due masse $= \frac{mu}{m+nds}$: ma il corpo veniva colla velocità u; dunque ha perduto la velocità minima

(1.) Saggio intorno il Sistema dell'Universo, Cap. VI. pag. 112. e seguenti.

$u - \frac{mu}{m+nds} = \frac{nuds}{m}$, di modo che uguagliandosi questa a $-du$, ci si presenterà l'equazione $\frac{nuds}{m} = -du$, e moltiplicando per u, $\frac{nu^2ds}{m} = -udu$. Ora chiamata v la resistenza ritardatrice, sappiamo essere $vds = -udu$; dunque $vds = \frac{nu^2ds}{m}$, e per conseguenza $v = \frac{nu^2}{m}$, cioè a dire nella ipotesi che il liquore sfugga prontamente dai lati, la detta resistenza proporzionale al quadrato dell'attuale velocità. Lo stesso si avvera anche della resistenza assoluta $R = mv = nu^2$.

Posto che la comunicazione del moto si faccia colle leggi dei corpi elastici, resterà al corpo m, compiuto l'urto, la velocità $\frac{mu - nuds}{m+nds}$. Si sottri questa dalla velocità u, e ne risulterà la velocità perduta $\frac{2nuds}{m} = -du$. Quindi scopriremo $\frac{2nu^2ds}{m} = -udu = vds$, e finalmente $v = \frac{2nu^2}{m}$. La resistenza ritardatrice adunque anche in questo incontro sta come il quadrato della velocità, e la sola differenza consiste nel coefficiente $\frac{n}{m}$ moltiplicato in un caso per l'unità, e nell'altro per il binario. Si applichi la riflessione alla resistenza assoluta $R = mv = 2nu^2$.

4. Giudica saggiamente mio padre nello Schediasma XXVIII. contenuto nel Tomo III. della sua Opera, pag. 343. » che niuna » delle due leggi accennate abbia luogo in natura, ma che in » maniera si contemperino, che nasca in fra due una di mezzo » e che la resistenza sia maggiore di quella, che richiedono i » corpi perfettamente molli, e minore dell'altra, ch'è propria dei » corpi perfettamente elastici. Tutta dunque l'alterazione con- » sisterà nel modificare il coefficiente $\frac{n}{m}$, che dovrà moltipli- » carsi per un numero rotto maggiore dell'unità, e minore » del binario. »

5. Si fa il Co. Jacopo ad esaminare cosa succeda, cangiata ipotesi, e passando al limite opposto, allora che il fluido cammina a seconda del solido, il quale urtando nel primo strato il tira seco di conserva ad imprimere il moto nel secondo, e così di mano in mano. Non dovendo in questo caso il fluido, che precede, staccarsi dal fluido, che vien dietro, si serve solamente della comunicazione del moto conforme alla legge dei corpi inerti. Scorso che abbia il corpo m lo spazio s, e dato il moto al fluido ns,

ali

gli rimarrà la velocità $\frac{mb}{m+ns} = u$. Avremo per tanto $\frac{1}{u} = \frac{m+ns}{b}$, e presa la differenza $-\frac{du}{u^2} = \frac{nds}{mb}$, o sia $-udu = vds = \frac{nu^3 ds}{mb}$, e finalmente la resistenza ritardatrice $v = \frac{nu^3}{mb}$, cioè come il cubo della attuale velocità, quando il fluido scacciato di luogo seconda costantemente il moto del solido. Una simile legge accetterà la resistenza assoluta $R = mv = \frac{nu^3}{b}$.

6. Che se il detto fluido viaggiasse parte di conserva col corpo m, e parte svagasse dai lati, onde la massa, che urta nello strato nds, fosse uguale ad $m+\frac{ns}{k}$, si scoprirebbe la velocità dopo la percossa $= \frac{(m+\frac{ns}{k}).u}{m+\frac{ns}{k}+nds}$, e conseguentemente la velocità perduta $= u\,\frac{(-m-\frac{ns}{k}).u}{m+\frac{ns}{k}+nds} = \frac{nuds}{m+\frac{ns}{k}} = -du$. Fatta la moltiplicazione per u troveremo $\frac{nu^2ds}{m+\frac{ns}{k}} = -udu = vds$, e perciò $v = \frac{nu^2}{m+\frac{ns}{k}}$. Dalla formola $\frac{nuds}{m+\frac{ns}{k}}$ ~~ne nasce quest'altra~~ $= -du$ ne nasce quest'altra $\frac{knds}{km+ns} = -\frac{du}{u}$, ed integrando, $k.\log.(km+ns) = \log.\frac{B}{u}$, ovvero $(km+ns)^k = \frac{B}{u}$. Per determinar il valore della costante B, osservo che ad $s=0$ corrisponde $u=b$. Avremo dunque $(km)^k = \frac{B}{b}$, e per conseguenza $b.(km)^k = B$. Sostituito in luogo di B lo scoperto valore, ne risulterà $(km+ns)^k = \frac{b.(km)^k}{u}$, ed indi $km+ns = \frac{b^{\frac{1}{k}}.km}{u^{\frac{1}{k}}}$, e per ultimo $m+\frac{ns}{k} = \frac{b^{\frac{1}{k}}.m}{u^{\frac{1}{k}}}$. Nella equazione $v = \frac{nu^2}{m+\frac{ns}{k}}$ in cambio di $m+\frac{ns}{k}$ pongo l'eguale grandezza $\frac{b^{\frac{1}{k}}.m}{u^{\frac{1}{k}}}$, e mi si presenta $v = \frac{nu^{2+\frac{1}{k}}}{mb^{\frac{1}{k}}}$, ch'è quanto a dire la resistenza ritardatrice v, ed anche l'assoluta $R = mv$ come la potestà $2+\frac{1}{k}$ media fra il quadrato, ed il cubo della velocità attuale. Se $k = \infty$, tutti gli strati nds sono sfuggiti lateralmente, e conforme il primo limite abbiamo $v = \frac{nu^2}{m}$, o pure $R = mv = nu^2$. Ma posto $k = 1$, allora tutto il fluido ns scacciato fuori di luogo viaggia a seconda del solido, e giusta il secondo limite ci si affaccia $v = \frac{nu^3}{mb}$, ovvero $R = mv = nu^3$. Finalmente fra questi due limiti si danno infiniti casi di mezzo, secondo che a k si adatta uno degli infiniti valori fra l'infinito e l'unità. Se per esempio mezzo il fluido ns si fosse lateralmente sottratto, e l'altra metà precedesse il solido, sarebbe $k = 2$, e si scoprirebbe

$v =$

$$v = \frac{nu^{\frac{5}{2}}}{mb^{\frac{1}{2}}}.$$

7. Si potrebbe frattanto considerare il ritardamento non della sola massa solida, ma ancora di quella massa fluida, che viene spinta innanzi dal solido. Ora io dico, che avverandosi in questa ipotesi le leggi stabilite da mio Padre in riguardo alle resistenze ritardatrici, sarà sempre la resistenza assoluta $R = nu^2$, e per conseguenza si riferirà in data ragione al quadrato della attuale velocità, o ceda il fluido dai lati, o seguiti tutto o in parte il moto del solido.

E primieramente scappi sempre di parte e di altra ogni strato di fluido nds, ed abbiamo già trovato al Numero 3. $R = nu^2$.

8. Ogni velo di fluido nds in secondo luogo seguiti costantemente a muoversi colla stessa velocità e direzione del corpo m, onde la massa totale, che urta nello strato nds, sia $= m + ns$. In tale circostanza abbiamo scoperta l'equazione $v = \frac{nu^3}{mb}$, da cui ne nasce l'altra $\frac{mb}{u} \cdot v = nu^2$: ma nella stessa ipotesi $\frac{mb}{m+ns} = u$, ovvero $\frac{mb}{u} = m + ns$; dunque $(m+ns) \cdot v = nu^2$, e fatta l'osservazione essere $(m+ns) \cdot v = R$, $R = nu^2$.

9. In terzo, ed ultimo luogo i veli fluidi nds in parte seguitino il movimento del corpo, ed in parte sfuggano lateralmente, di modo che sia $m + \frac{ns}{k}$ la massa, che comunica il moto allo strato nds. Di sopra al Numero 6. sono pervenuto all'equazione $v = \frac{nu^2}{m + \frac{ns}{k}}$. Moltiplico per $m + \frac{ns}{k}$, ed ho $(m + \frac{ns}{k}) \cdot v = nu^2$: ma $(m + \frac{ns}{k}) \cdot v = R$; dunque $R = nu^2$.

10. Non voglio tralasciar una riflessione, che mi sembra molto importante. Sia $m + \frac{ns}{k}$ la massa, che urta nello strato liquido nds. Questa espressione abbraccia tutti i casi, secondo i varj valori di k. Al Numero 6. ho trovato $\frac{nu^2 ds}{m + \frac{ns}{k}} = -2udu$, ovvero $nu^2 ds = (m + \frac{ns}{k}) \cdot -2udu$: ma l'omogeneo di comparazione si eguaglia all'elemento della forza viva perduta dalla massa $m + \frac{ns}{k}$ nell'urto collo strato nds; dunque anche $nu^2 ds$ pareggia la detta perdita. Siccome non si guadagna mai forza viva senza l'azione d'una forza morta, così ella è necessaria la reazione d'una forza morta, acciocchè segua scapito di forza viva. Ora questa resistenza, o forza che reagisce, si determina

agevolmente

egualmente dividendo l'elemento della forza viva perduta dal corpo, mentre scorre lo spazio minimo ds, per quello spazietto, per cui la resistenza esercita la sua azione. Nel nostro caso la resistenza agisce per lo stesso spazio ds; per cui si move il corpo $m + \frac{ns}{k}$, perchè si oppone ad esso direttamente. Quindi dividendo la forza viva perduta $nu^2 ds$ per ds, ne risulta il valore della resistenza assoluta $k = nu^2$, che si adatta egualmente ai due limiti, e a qualunque circostanza di mezzo.

11. Non esamino presentemente se possa aver luogo in natura la supposizione, che quanto il corpo m cammina per uno spazio maggiore s, tanto una maggior copia di fluido $\frac{ns}{k}$ si spinga innanzi, la quale seguiti la sua direzione, e si mova colla medesima velocità. Nella Dissertazione, in cui tratto del moto di discesa, e di ascendimento dei corpi solidi immersi nei mezzi fluidi, ho fatto vedere che insieme col solido si move, ma con direzione contraria, una quantità finita di fluido, col di cui mezzo si va continuamente riempiendo lo spazio, che resta vuoto, mentre il solido avanza un minimo passo: che quando il volume della massa fluida è uguale, e molto più quando è minore di quello del solido, la detta massa fluida si move più velocemente della solida: che quando il volume fluido posto in movimento è maggiore del solido, la velocità del primo può esser minore di quella del secondo: e che finalmente passando dal fisico al matematico segue lo stesso effetto, come se una data massa fluida da determinarsi colla esperienza viaggiasse a ritroso colla celerità stessa del corpo m.

12. Ora le medesime cose seguono, allora che un corpo m cammina orizzontalmente attraverso di un fluido. Perciò in tale incontro si adempierà la formola $nu^2 ds = (m+h) \cdot -udu$, nella quale h dinota la massa liquida, che si suppone muoversi con velocità eguale, e contraria a quella del corpo m. Dalla premessa formola deriva quest'altra $ds = \left(\frac{m+h}{n}\right) \cdot -\frac{du}{u}$, la quale mi dà $s = -\log u$ nella logistica della suttangente $\frac{m+h}{n}$, e presa siccome protonumero la primitiva velocità $= b$ del corpo m. Con tal legge si moverebbe il corpo m orizzontalmente attraverso di un fluido, se incontrasse la sola resistenza nascente dall'inerzia del fluido stesso, ed in sì fatta ipotesi non perderebbe tutta la velocità,

se

sa non dopo avere scorso uno spazio infinito, corrispondendo $s = -\log. 0 = \infty$ ad $u = 0$.

13. L'esperienza frattanto ci insegna, che il corpo si ferma dopo aver passato uno spazio finito, il che è un manifesto indizio, che altre resistenze si oppongono al di lui moto. Premetto la dimostrazione, che non si salva il mentovato fenomeno ammessa una nuova resistenza proporzionale ad una potestà della velocità, il cui esponente sia maggiore del due. Imperciocchè abbiasi $(nu^2 + ku^{2+p}).ds = (m+h). -udu$, e per conseguenza $ds = \left(\frac{m+h}{n}\right). \frac{-ndu}{nu+ku^{1+p}}$. La frazione $\frac{-ndu}{nu+ku^{1+p}}$ si divide nelle due $-\frac{du}{u} + \frac{ku^{p-1}du}{n+ku^p}$, e quindi ci si presenta $ds = \left(\frac{m+h}{n}\right).\left(-\frac{du}{u} + \frac{ku^{p-1}du}{n+ku^p}\right)$, ed integrando, $s = -\log. u + \frac{1}{p}\log.(n+ku^p) - \frac{1}{p}\log.(n+kb^p)$ nella logaritmica della suttangente $\frac{m+h}{n}$, e del protonumero b. Nella supposizione di $u = 0$ è $-\log. u = \infty$, e gli altri due logaritmi stanno dentro i limiti del finito, e perciò $s = \infty$. Introdotta dunque anche la resistenza ku^{2+p}, il moto del corpo si estingue soltanto dopo aver viaggiato per uno spazio infinito.

14. Passo a rintracciare cosa succeda, quando la nuova resistenza è come la potenza della velocità, l'esponente della quale sia minor del binario, ma per altro positivo, ripugnando che esso esponente sia negativo, onde al crescere della velocità scemi la resistenza. Avremo dunque in sì fatta ipotesi la formola $(nu^2 + ku^{2-p}).ds = (m+h). -udu$, nella quale a p può soltanto competere un valore positivo medio fra il due, ed il nulla, ed anche uguale a due. Maneggiata questa formola col metodo poco fa usato, scopriremo $s = -\log. u - \frac{1}{p}\log.(n+ku^{-p}) + \frac{1}{p}\log.(n+kb^{-p})$; o sia poichè $-\log. u = \log. \frac{b^2}{u}$, $s = \log. \frac{b^2}{u} - \frac{1}{p}\log.\left(n+\frac{k}{u^p}\right) + \frac{1}{p}\log.\left(n+\frac{k}{b^p}\right)$. Osservo essere $\frac{1}{p}.\log.\left(n+\frac{k}{u^p}\right) = \log\left(b^{1-\frac{1}{p}}.\left(n+\frac{k}{u^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$ (*), $\frac{1}{p}.\log.\left(n+\frac{k}{b^p}\right) = \log.\left(b^{1-\frac{1}{p}}.\left(n+\frac{k}{b^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$, e perciò avremo

---

(*) Chi desiderasse di ciò la dimostrazione, faccia $b : 1 :: n + \frac{k}{u^p} : b^{-1}.\left(n+\frac{k}{u^p}\right)$, e cavi la conseguenza, che $\log.\left(b^{-1}.\left(n+\frac{k}{u^p}\right)\right)$ nelli ipotesi del protonumero $= 1$ pareggia $\log.\left(n+\frac{k}{u^p}\right)$ nelli ipotesi del protonumero b. Ora nella prima ipotesi $\frac{1}{p}.\log.\left(b^{-1}.\left(n+\frac{k}{u^p}\right)\right) = \log\left(b^{-\frac{1}{p}}.\left(n+\frac{k}{u^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$; dunque

avremo, adempiuta la sostituzione, $s = \log.\frac{b^2}{u} - \log.(b^{1-\frac{1}{p}}.(n+\frac{k}{u^p})^{\frac{1}{p}})$ $+ \log.(b^{1-\frac{1}{p}}.(n+\frac{k}{b^p})^{\frac{1}{p}})$. La velocità u sia divenuta infinitamente piccola, e cancellati i termini incomparabili, trovo $s = \log.\frac{b^2}{u} - \log.(b^{1-\frac{1}{p}}.\frac{k^{\frac{1}{p}}}{u}) + \log.(b^{1-\frac{1}{p}}.(n+\frac{k}{b^p})^{\frac{1}{p}})$. Acciocchè lo spazio s sia finito egli è d'uopo che sia finita la differenza fra i due primi logaritmi ambo infiniti, la qual condizione richiede che i numeri $\frac{b^2}{u}$, $b^{1-\frac{1}{p}}.\frac{k^{\frac{1}{p}}}{u}$ si corrispondano in proporzione finita: ma i detti numeri stanno come $b^{1+\frac{1}{p}} : k^{\frac{1}{p}}$, ch'è una ragione determinata qualunque valore si assegni a p dentro i prescritti confini, purchè non sia $p = o$; dunque quando la nuova resistenza sia come la dignità u^{2-p}, il cui esponente sia minore del due, ed anche uguale a nulla, nel qual caso la resistenza diviene costante, il corpo si fermerà dopo aver viaggiato per uno spazio finito.

15. Un corpo solido, che si muove orizzontalmente dentro d'un fluido, oltre la resistenza nascente dall'inerzia del fluido stesso, ne incontra altre due, che derivano dalla viscosità del fluido, e dal fregamento prodotto dalla scabrosità della superficie del solido. Queste resistenze sono costanti, nè in loro ha luogo la velocità, se non in quanto lo spazio ds, per cui reagiscono durante il tempicello dt, è proporzionale alla velocità. Chiamando dunque ng^2 la somma delle predette resistenze costanti, ci si offrirà l'equazione $(ng^2+nu^2).ds = (m+h).-udu$, ovvero $ds = (\frac{m+h}{2n}).-\frac{2udu}{g^2+u^2}$, ed integrando $s = -\log.(g^2+u^2)$ nella logistica della suttangente $\frac{m+h}{2n}$, ed assunta siccome protonumero, la grandezza g^2+b^2; di modo che ad $u=b$ corrisponda $s = -\log.(g^2+b^2) = o$.

16. All

Dunque col mezzo dell'analogia $1 : b :: b^{-\frac{1}{p}}.(n+\frac{k}{u^p})^{\frac{1}{p}} : b^{1-\frac{1}{p}}.(n+\frac{k}{u^p})^{\frac{1}{p}}$ ci accorgeremo essere $\frac{1}{p}\log.(b^{-1}.(n+\frac{k}{u^p}))$ (protonumero 1.) $= \log.(b^{-\frac{1}{p}}.(n+\frac{k}{u^p})^{\frac{1}{p}})$ (protonumero 1.) $= \log.(b^{1-\frac{1}{p}}.(n+\frac{k}{u^p})^{\frac{1}{p}})$ (protonumero b.). Ma $\frac{1}{p}\log.(b^{-1}.(n+\frac{k}{u^p}))$ (protonumero 1.) $= \frac{1}{p}\log.(n+\frac{k}{u^p})$ (protonumero b); dunque essendo b il protonumero $\frac{1}{p}\log.(n+\frac{k}{u^p}) = \log.(b^{1-\frac{1}{p}}(n+\frac{k}{u^p})^{\frac{1}{p}})$; il che &c.

16. Alla assintoto AC (fig. 1.) colla suttangente $\frac{m+h}{n}$ si delinei la logaritmica LBHD, a cui si adatti l'ordinata $\overline{AB} = g^2+b^2$, che deve servire di protonumero. Tagliata $AE = g^2$, si tiri ED parallela ad AC, e pel punto D, in cui interseca la logistica, si meni DC parallela a BA. Dopo ciò all'asse EB, col vertice in E, e col parametro uguale all'unità descrivasi la parabola Apolloniana EKF; dico che dopo scorso dal corpo m lo spazio $AG = s$, gli resterà il quadrato della velocità $u^2 = HM$, e la velocità $u = IK$. In fatti $AG = s = -\log.GH = -\log.(g^2+u^2)$: ma $GM = g^2$; dunque $MH = EI = u^2$, e per la natura della parabola EKF, $IK = u$. Passato dal corpo lo spazio $AC = s = \log.CD = \log.g^2$, sarà estinta tutta la velocità. Quanto il fluido sarà meno viscido, e più levigata la superficie del solido, tanto più picciolo riuscirà il valore di CD $= g^2$, ed il corpo m passerà uno spazio maggiore AC prima di perdere l'intera velocità. Supposta infinita la primitiva velocità $= b$, il corpo non rimarrebbe in quiete, salvo che dopo aver corso uno spazio infinito AC, avendo in tal caso AB : CD una proporzione maggiore di qualunque data.

17. Chi avesse brama di scoprire la relazione fra il tempo, e la corrispondente velocità, nella formola differenziale del Numero 15. sostituisca udt in cambio di ds, e fatta la divisione per u, gli si presenterà $dt = \left(\frac{m+h}{n}\right).\frac{-du}{g^2+u^2} = \left(\frac{m+h}{ng^2}\right).\frac{-g^2du}{g^2+u^2}$, e passando all'integrazione, $t = \left(\frac{m+h}{ng^2}\right).$(Arco Raggio g Tangente b − Arco Raggio g Tangente u). Ho aggiunta la necessaria costante, onde nel principio del moto ad $u=b$ si riferisca $t=0$.

18. Tiro l'indefinita CA (fig. 2.), e tagliata $CI = g$, delineo $ID = b$ normale a CA, e poscia conduco la diagonale CD, che continuo sintantoché sia $CF = \frac{m+h}{ng}$. Coi raggi CI, CF descrivo gli archi circolari IB, FA, e segnata $IK = u$, e menata la linea CKG, affermo che FG sarà il tempo corrispondente, di modo che nel detto tempo il solido m avrà perduta la velocità DK, e gli resterà la IK. La costruzione ci manifesta essere $EB = IB - IE =$ Arco Raggio g Tangente b − Arco Raggio g Tangente u; e quindi avremo

CA : CF :: BE :

g : $\frac{m+h}{ng}$ :: Arco Rag. g Tang. b − Arco Rag. g Tang. u :

$$\left(\frac{m+h}{ng^2}\right) \cdot \left(\text{Arco Rag. } g \text{ Tang. } b - \text{Arco Rag. } g \text{ Tang. } u\right) = t \quad (FG)$$

il che &c.

Se siano minime la viscosità, e la fregagione, sarà tale altresì $CA = g$; ed al contrario ascenderà all'infinito $CF = \frac{m+h}{ng}$; e per conseguenza anche l'arco FA eguale al tempo, che si richiede per estinguere l'intera velocità del solido, che giungerà alla quiete dopo aver impiegato un tempo infinito a viaggiare per uno spazio parimente infinito.

Che se tutte l'altre grandezze stiano dentro i confini del finito, e si finga soltanto infinita la velocità primitiva $ID = b$, ci accorgeremo essere IEB, AGF due quadranti descritti coi raggi finiti $CB = g$, $CF = \frac{m+h}{ng}$; e quindi benchè il corpo, come abbiamo veduto al Numero 16., scorra uno spazio infinito, nulladimeno consumerà la sua velocità infinita in tempo finito $= FA$.

19. Il Co. Jacopo mio padre nello Schediasma XXX. contenuto nel Tomo III. delle sue Opere, in cui tratta *Del Moto dei pendoli a cicloide, posta la resistenza del mezzo in ragione duplicata dell'attuale velocità*, stabilisce nello Scolio VIII. pag. 337. colla scorta dell'esperienza, che le resistenze dei mezzi fluidi, che fanno contrasto al moto dei pendoli, sono proporzionali per una parte negli archi grandi al quadrato della velocità, e per l'altra in quelli archi minimi, ed ultimi, che sta di mezzo fra i confini del moto e della quiete, si ponno prendere per costanti. Ciò addiviene a mio credere, perchè venendo formata la totale resistenza dalla somma di due, una relativa al quadrato dell'attuale velocità, e l'altra costante; negli archi grandi la seconda è piccolissima e trascurabile in paragone della prima, e negli archi minimi succede tutto il contrario.

20. Ora egli è di uopo provare, che sendo negli archi grandi trascurabile la resistenza costante rispettivamente a quella, che seguita la proporzione del quadrato della velocità, come chiaramente si raccoglie dagli esperimenti registrati dal Cavalier Newton nello Scolio della Proposizione 31. del Libro secondo de' suoi Principj Matematici della Filosofia Naturale; negli archi piccioli per l'opposto va la resistenza ultimamente nominata talmente scemando, che finalmente diviene inassegnabile in paragone della

costante

costante, per quanto questa suppongasi tenuissima.

Un pendolo a cicloide incontri la sola resistenza nu^2; e nell'atto di scendere per l'arco BC (Fig. 3.) sia giunto al punto D: si dimanda nel detto sito il valore della resistenza $v = nu^2$. Descritta all'assintoto IK la logistica GIo colla suttangente $\frac{1}{2n}$, si adatti ad essa l'ordinata IG = 1, e pel punto G si tiri l'indefinita RH parallela ad IK, ed indi si tagli GQ uguale all'arco BC, a cui si aggiunga $QH = \frac{1}{2n}$, e condotta HK parallela a GI, si delinei la diagonale GK. Si segni poscia l'assissa GL uguale all'arco BD, e menata l'ordinata Lf, pel punto f descrivasi AfT parallela a GK: ha dimostrato mio padre nella citata Dissertazione essere nel punto D la resistenza $v = nu^2 = RG$. Pongo $GQ = BC = a$, $GL = BD = s$, $Lf = y$, e la similitudine dei triangoli KHG, fLR mi somministra l'analogia

$$KH : HG :: fL : LR$$
$$1 : a+\tfrac{1}{2n} :: y : s+v,$$

da cui risulta l'equazione $(a+\frac{1}{2n}) \cdot y = s+v$. Fa vedere in oltre il mentovato mio padre, che la resistenza giunge al massimo qualora sia RG = LQ, e per conseguenza $s+v = a$; e quindi avremo la massima resistenza, quando si adempia la formola $(a+\frac{1}{2n}) \cdot y = a$, e sia $y = \frac{a}{a+\frac{1}{2n}} = \frac{2na}{2na+1}$. Fingasi infinitesima l'arco $BC = GQ = a$, e segnata $IF = \frac{1}{2n}$ suttangente della logistica, e tirata GF tangente, ci si presenterà l'analogia

$$FI : IG :: GL : Lf$$
$$\tfrac{1}{2n} : 1 :: s : y,$$

che mi dà $y = 2ns$: ma abbiamo già trovato $y = \frac{2na}{2na+1}$; dunque $s = \frac{a}{2na+1}$. Ripiglio per mano la formola $a = s+v$, o sia $a-s = v$, e sostituendo in essa il valore di s poco fa trovato, scopro $v = a - \frac{a}{2na+1} = \frac{2na^2}{2na+1} = 2na^2$, grandezza della massima resistenza v nell'ipotesi, che sia minimo l'arco $BC = a$. Divenendo per tanto infinitesimo l'arco $BC = a$, la resistenza $v = nu^2$ giunta anche al massimo è infinitamente più piccola dell'arco stesso; e perciò per quanto si supponga fiacca la resistenza costante, posso sempre assegnare un arco BC, rispettivamente a cui la massima resistenza $v = nu^2$ sia incomparabilmente più debole. Aggiungasi, che venendo la velocità u minorata anche dalla resistenza costante, la resistenza nu^2 scemerà più di quello richiede il calcolo

sovrapposto

sovrapposto, e riuscirà tanto più trascurabile negli archi piccioli.

21. Osserva il Co. Jacopo mio padre nello Scolio II. del nominato Schediasma XXX. pag. 302., che posta la resistenza $= nu^2$, quando il pendolo sarà pervenuto al punto più basso C, conserverà in se stesso qualche grado di velocità; laonde dovrà necessariamente reciprocare, qualunque sia il valore della coefficiente n: e quindi messo il pendolo una volta in moto, continua egli ad oscillare senza mai fermarsi. Al contrario nello Schediasma XXXII. in cui si propone di determinare il moto di un pendolo a cicloide supposta costante la resistenza del mezzo, dimostra alla pag. 391. che il pendolo resterebbe finalmente immobile o nel punto infimo C, o pure anche nel punto prossimo M, qualora avendo in esso perduta tutta la velocità, la resistenza costante pareggiasse, o superasse l'arco MC, per cui si esprime la forza tangenziale. Suppone quest'ultima asserzione, che il fluido, e per esempio l'acqua, vi stagni in un perfetto riposo: ma venendo sempre agitato da qualche moto, la gravità del pendolo, che mai non dorme, trova ben presto l'opportunità di farlo discendere fino all'infimo punto C. Insegnandoci l'esperienza, che i pendoli tutti o più presto o più tardi si mettono in quiete, dobbiamo conchiudere, essere questo effetto prodotto dalla resistenza costante, che unitamente coll'altra proporzionale al quadrato della velocità al loro movimento si oppone.

Nuova maniera di costruire
le scale elittiche.
nella N. R. Calogeriana T. XXXV.

[illegible] li in Agosto 1755

Nuova maniera di costruire le Scale ellittiche. ~~a lumaca~~.

Nel disegnare le scale ellittiche a lumaca si incontrano varj disordini, né mai al presente gli Architetti hanno insegnato il metodo per evitarli tutti generalmente. Se gli scalini si terminano di pari larghezza verso l'anima, di pari larghezza verso la muraglia, i voltatesta riescono sotto squadra, e le vere larghezze in maniera per esempio alla metà della lunghezza degli scalini che risultano dal condurre una perpendicolare alla faccia di ogni scalino, si trovano ineguali.

Vogliamo che le dette larghezze perpendicolari in un dato sito, come sarebbe a dire alla metà della lunghezza dello scalino siano eguali, i due di prima voltatesta sono a squadra, ed interverrà che gli scalini riusciranno inegualmente larghi tanto verso l'anima, quanto verso la muraglia. Nella pianta delli elissi dalla parte dell'anima gli scalini si restringeranno talmente, che il piede non vi capiva, ed oltre a ciò la scala in detto posto ascendeva più rapida che nel resto delli elissi. Quindi nell'appoggio succedevano delle curvature e delle inflessioni poco aggradevoli all'occhio. Noto di più, che avendo posta in opera una di sì fatte scale, ho dovuto tenere l'appoggio più alto nelli apici, che nel resto delli elissi per due motivi, e perché i lumi di ferro, che ornavano l'appoggio, riuscissero meno irregolari, e perché l'appoggio stesso servisse di sufficiente difesa a chi discende per la scala.

3 Ora che direbbono gli Architetti, se io loro manifestassi

Sag.

infermati un metodo, col mezzo del quale
si schivano tutti i mentovati difetti.
Sia ABCD (fig. 1) il rettangolo dentro
cui debbasi delineare la metà di una
scala a lumaca. Dividasi egualmente la
linea AB in G, e per questo punto si
tiri ad essa la normale GF. Seguita
poi GG eguale alla metà della larghezza della
lumaca, si faccia FH = AG, e condotta
la diagonale GH, e taglisiala in due
parti eguali nel punto I, si tiri per =
pendicolare alla stessa la linea IK, la
quale intersecherà la retta AB, in te
di capo continuata, nel punto K.
Si congiungano i punti K, H colla linea
KH, la quale, come agevolmente può
dimostrarsi, si agguaglia a KG.
Fatto centro in K coi raggi KG, KA
si descrivano le due porzioni simili di
circolo GH, AL; ed indi fatto centro
in H col raggio HL = HF = GA, si delinei
la porzione di circolo LF. Con pari
metodo si adempirà la descrizione dei
seguenti di circolo VH, BO, OF.
Il settore HLFOH dovrà coprirsi di piano,
ed i settori ALHG, BOHV saranno occu-
pati dagli scalini; la direzione dei quali
tenderà ai centri K, e K. Tendendo
pertanto tutti gli scalini del medesimo
ramo per esempio ALHG allo stesso centro
K, i loro [illegible] riusciranno a squadra,
e le loro larghezze tanto verso la lumaca,
quanto verso la muraglia si potranno
riuscire eguali. Avverto che il piano
dovrà dilatarsi mezzo scalino per parte
HN, HX, e ciò per il motivo che la gradinata
scende.

uscirà regolarmente, e senza salti.

4 Se le costruzione dell'edifizio richiedessero due pietre nei siti AG, BV, queste si potranno attaccare senza veruna difficoltà.

5 Si giudichino descrivere ellittica anche la figura delle arcata, fatti CG (che è il minore della semilarghezza delle arcata stessa), e posta in opera la costruzione tutte spiegata ritrovar il centro K. Segnata poscia CP eguale alla metà della larghezza delle arcata, e primo coi raggi KP, KA delinei i seguenti circoli di nucleo DN, AL, ed indi coi raggi HV, HL i seguenti parimente simili NQ, LZ. Gli altri due quarti di cerchio ZXQ, BOZ si descriveranno con pari metodo.

6. Supposto che il ~~piano~~ NLZ e XQN non si dilati punto al di fuori di LN, OX, si vede necessario, che la posizione di ciò colo NQX venga a muoversi dalla [illegible] sfera di uno scalino verso le arcata; di modo che si agguagli o ad una, o a due larghezze &c. Così si eviteranno i salti della ringhiera, il quale si può ornare regolarmente con colonnelle o in qualsivoglia altra maniera.

7 Venga ora notato di bel sì, che l'angolo LHO sia retto, e conseguentemente semiretti gli angoli LHZ, OHZ. Essendo semiretto l'angolo LHZ, si scoprirà parimente tale l'opposto al vertice CHK, come ancora l'CKH, stante che è retto l'angolo HCK. Quindi sotto gli archi DN, AL, NQ, LZ si agguagliano i semiquadranti. Ne segue inoltre, essere CH = CK, e che

ciascuno

ciascuno degli angoli KGK', KHG, si eguagli a tre quarti di retto. Detratto dall'angolo KHG il semiretto KHC, resterà l'angolo GHC eguale ad un quarto di retto.

Si taglia (Fig. 3) AR = CT, e condotta pel punto C la linea CT, che con CA formi un angolo semiretto, col raggio CR si descriva il mezzo quadrante RT. Dal punto T si lasci cadere TG perpendicolare ad AB, e menata RT, si tiri ad essa parallela la linea GH pel punto dato G. Segnate CK, CK' eguali ad CH; dico che K, K' sono i punti, che servono alla costruzione della scala a lumaca o conforme alla Fig. 1, o conforme alla Fig. 2 dotata della proprietà, che l'angolo KHK' sia retto.

La dimostrazione della mia asserzione dipende da due punti, cioè, che conforme ho provato dovrei ricevere nella ipotesi dell'angolo KHK' retto, gli angoli GHC, CGH si eguagliano, quello alla terza parte, e questo alle tre quarte parti di un retto; e che, siccome la generale costruzione sopra spiegata richiede, sia TH = AG. Quanto al primo punto, essendo per la premessa costruzione simili i triangoli GHC, RTG, egli è d'uopo provare che gli angoli RTG, GRT sono eguali l'uno ad un quarto, e l'altro a tre quarti di retto. Giacchè il triangolo RCT è isoscele, e l'angolo C semiretto, ne segue che ciascuno degli angoli alla base RT, perciò anche il GRT, pareggia tre quarti di retto. Inoltre sottraendo dall'angolo RTC il semiretto GTC, rimane l'angolo RTG eguale ad un quarto di retto.

Per produrre il secondo punto, si tiri la linea GY, e si agguagli $QV = QG$, onde resterà $BV = AG$. Nei triangoli HIY, GIY essendo $HI = GI$; IY comune, e gli angoli in I retti, sarà parimente $GY = YH$, e l'angolo IGY eguale all'IHY vale a dire alla mezza parte di un retto. Da ciò ne risulta essere l'angolo YGQ semiretto, e conseguentemente $GQ = QY$. I triangoli GQY, TGQ sono dunque eguali, dal che ne segue essere $GY = TQ$; ma $TQ = RQ$; dunque $RQ = GY = YH$. Ad RQ, YH si aggiungano le linee eguali QV, QY, e ne proverrà $RV = QH$. Ma per la presente costruzione $RB = QI$; dunque $BV = IH$, e per conseguenza $AG = IH$; il che &c.

8 Se la linea $QI = BR$ fosse di tal natura, che il punto G cadesse in A, il che succederebbe, quando si verificasse essere $QI = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AB\sqrt{2}$, la larghezza AG del vano $ALHG$ della nostra scala a chiocciola si troverebbe eguale a nulla. Quindi per far uso della determinazione dell'angolo retto LHO, bisogna che QI sia di tale grandezza, che ne risulti una conveniente larghezza AG del vano $ALHG$.

9 Riuscirà opportuno in alcuni incontri di adattare gli scalini allo spazio $LZQN$ (fig. 4.) determinato dai circoli seguenti di movimento NQ, LZ descritti coi raggi più corti HN, HL, ricevendo per il piatto il sito $ALNP$, i cui lati circolari PN, AL sono delineati con i raggi più lunghi KN, KL. Si adoprerà questo genere di scale, qualora

QI

CF minori di corda AC, onde il giusto, di cui AN si è la metà, non riesce di costante grandezza. Posta in opera la stessa costruzione da me usata al numero (5), avverto, quanto che AGC si taglierà più piccola, ed il centro K si allontanerà, gli archi NC, CF si accosteranno al quadrante, e il ringrosso AN si restringerà. Il giudizioso Architetto deve ricorrere alla costruzione, e scegliere quelle misure, che sono più convenienti al bisogno.

Nuova maniera di costruire
le Scale Elittiche.
nella N. R. Calogeriana T. XXXV.